әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
Математика және математикалық модельдеу институты

ӘОЖ 517.956.3 Қолжазба құқығында

ҚАХАРМАН НҰРБЕК

Азғындалған гиперболалық теңдеулер үшін жалпы регулярлы шеттік есептер

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының докторы,
ҰҒА академигі, Профессор
Кәлменов Т.Ш.

Шетелдік ғылыми кеңесші
PhD, профессор
Ламберти П.Д. (Падуа, Италия)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2023

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$\mathbb{R}$	– Нақты сандар жиыны;
$\mathbb{R}^n$	– n өлшемді векторлық кеңістік;
$\partial\Omega$	– Ω ақырлы облысының шекарасы;
$\|\cdot\|_X$	– X кеңістігінінің элементінің нормасы;
$C[\Omega]$	– Ω облысында үзіліссіз функциялар кеңістігі;
$C^k[\Omega]$	– Ω облысында k -ретті дифференциалданатын функциялар кеңістігі;
$L_p(\Omega)$	– Лебег кеңістігі (p-шы дәрежесі интегралданатын өлшемді функциялар кеңістігі);
$W_p^k(\Omega)$	– Соболев кеңістігі;
$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$	– Эйлер гамма – функциясы;
$J_p(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$	– бірінші текті Бессел функциясы;
$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$	– екінші текті Бессел функциясы (Нейман функциясы);
$\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$	– Лаплас операторы;

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Цилиндрлік облыстағы аралас Коши есебін зерттеуде бүйірлік шекаралық шарттары әдетте Дирихле шарты түріндегі локалды шекаралық шарттар немесе периодтық шекаралық шарттары арқылы беріледі.

Т.Ш. Кәлменов пен М.О. Өтелбаев [1] жұмысында дифференциалдық теңдеуге сәйкес қисынды шеттік шарттарды қанағаттандыратын интегралдық оператордың нақты мәнді өзегіне шарттар тапты. Т.Ш. Кәлменов пен Д. Сұрағанның [2-5] жұмыстарында полигармониялық потенциал үшін, Рисс потенциалы үшін және басқа да классикалық операторлар үшін шекаралық шарттар табылады. Жылу потенциалдары үшін ұқсас нәтиже [5, 188 бет] жұмысында алынды. Осы мысалдардың барлығында интегралдық операторлар сәйкес дифференциалдық теңдеулердің шешімдері болып табылады. Бұл интегралдық операторлардың бірегейлігі - шекаралық шартпен анықталады. Т.Ш. Кәлменов пен Д. Сұрағанның [3, 595 бет] жұмысында алғаш рет Ньютон (көлем) потенциалының шекаралық шарты табылды, бұл Лаплас теңдеуі үшін жаңа интегро-дифференциалды өз-өзіне түйіндес шекаралық шартды болып табылады.

1980 жылдары М. Өтелбаев пен оның шәкірттері кері оператор мағынасында, минималды оператордың қандайда бір қисынды кеңеюін пайдалана отырып, минималды оператордың барлық регулярлы (шекаралық қисынды) кеңеюлерін сипатайтын абстракты теоремасын дәлелдеді. Әлбетте, бұл теорема максимал оператордың да барлық мүмкін шекаралық қисынды тарылуларын да сипаттай алды.

Бұл диссертациялық жұмыста Ньютон потенциалының шекаралық шартын пайдаланып, сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас Коши есебі алғаш рет зерттелді. Бұл жұмыстағы алынған нәтижелердің басқа белгілі нәтижелерден айырмашылығы қарастырылып отырған аралас Коши есебінің барлық шешімдерін классикалық Соболев кеңістігінде анықталды.

Сондай-ақ, біз [1, 395 бет] жұмысының нәтижелерін негізге ала отырып минималды оператордың барлық қисынды кеңеюлерін сипаттайтын М. Өтелбаевтың абстракты теоремасын азғындалған теңдеулердің бір өлшемді аналогтары үшін қолданып, мүмкін болатын барлық шекаралық қисынды есептерді таптық, яғни жалпы регулярлы шекаралық шарттарын табылды. Бастапқы шарты жалпы регулярлы шартпен, ал бүйірлік шекаралық шарты Ньютон потенциалының шекаралық шартымен қойылған азғындалған гиперболалық теңдеулерді зерттелді.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің қазіргі теориясында азғындалған гиперболалық және эллиптикалық теңдеулерді, сонымен қатар аралас типті теңдеулерді зерттеу маңызды орын алады. Бұл теңдеулер класына қызығушылықтың артуы алынған нәтижелердің үлкен теориялық маңыздылығымен де, олардың газ динамикасында, гидродинамикада, электрондардың шашырауы теориясында және көптеген басқа әртүрлі салаларында қолданылуымен түсіндіріледі. Қазіргі ғылымның дамуы азғындалған теңдеулер нақты физикалық және биологиялық процестердің жақсы үлгісі болып табылатынын көрсетті. Және бұл олар үшін қазіргі уақытта көптеген математиктердің іргелі зерттеулерінің пәні болып табылатын әртүрлі шекаралық есептерді қою мен шешудің өзектілігіне әкелді.

Ф. Трикоми [6] мен С. Геллерстедттің [7] іргелі еңбектерінен кейін қарастырылып отырған азғындалған гиперболалық типті дифференциалдық теңдеулерді зерттеудің маңызды нәтижелері А.В. Бицадзенің [8] және М.М. Смирновтың [9] белгілі монографияларында берілген.

Әдетте, алдымен теңдеудің негізгі бөлігі бар модельдік теңдеу үшін шекаралық есептер зерттелді, содан кейін күшті азғындалғын жағдайында бастапқы шекаралық есеп шешілетіндей кіші коэффициенттер үшін шарттар табу арқылы зерттелінді. Кіші коэффициенттердегі бұл шарттарды алғаш рет голланд математигі С. Геллерстедт [7, 3-90 бет] көрсеткен, сондықтан да, бұл шарттар Геллерстедт шарттары деп аталады. Егер Геллерстедт шарттары орындалмаса, тіпті Коши деректері Жевре класында болмаса да, Коши есебі шешілімді болмайды. Геллерстедт шарттары орындалған жағдайында барлық классикалық есептер - Коши есебі, Гурса есебі, Дарбу есебі және Трикоми есептері қисынды шешілімді болатынын атап өткен жөн. Сондай-ақ, Геллерстед шартын басқа қандай шартпен алмастыра аламыз деген мәселе туындады. Бұл сұрақтың жауабы ретінде А.Н. Нахушевтың [10] және Т.Ш. Кәлменовтың [11] жұмысында жаңа шарттар табылды, атап айтқанда, Дарбу есебі үшін күшті шешімнің бірегейлігі және әлсіз шешімнің болуы үшін, кіші коэффициенттердің таңбасына белгілі бір талаптар қою керек, содан кейін В.Н. Врагов [12] ойлап тапқан көмекші оператор әдісінің көмегімен бұл есептің күшті шешілімділігін анықтады. Баса айту керек, Т.Ш. Кәлменов азғындалған гиперболалық (эллипстік) теңдеулер үшін бастапқы және шеттік есептерінің қисындылық теориясын зерттеуде, сондай-ақ, аралас типті теңдеулер үшін шеттік есептерінің қисындылық теориясына терең зерттеулер жүргізген.

Трикомидің негізгі шекаралық есебін және басқа да шекаралық есептерді шешу күрделі сингулярлық интегралдық теңдеулер әдістерін қолдану арқылы жүзеге асырылды. Сондықтан шешілуі оңай және оның көмегімен басқа шекаралық есептер шығарылатын қисынды шекаралық есепті табу мәселесі қойылды.

Сипаттауыш конус қамтыған облыстардағы қисынды қойылған шекаралық есептердің көпбейнелілігі стандартты аралас цилиндрлік облысқа қарағанда әлдеқайда кең, бірақ оларды тек тар кластағы теңдеулер үшін шешуге болады.

Сипаттауыш емес азғындалған екінші ретті гиперболалық теңдеулер үшін аралас Коши есебіне арналған бірқатар зерттеулер М.Л. Красновтың [13] жұмысынан бастау алады. Кейінірек бұл жұмыстар азғындалған жоғары ретті теңдеулер үшін Д.Т. Джураев [14], В.Н. Врагов және А.И. Кожанов [15] жұмыстарында жалпыланды. Ф.Г. Трикоми аралас типті теңдеу үшін шекаралық есептерді зерттеуді, сипаттауыш конуста гиперболалық теңдеулер үшін жаңа шекаралық есептерді зерттеуге әкелді, ал бұл есептер алғаш рет С. Геллерстедт, А.В. Бицадзе, А.М. Нахушев, және Т.Ш. Кәлменовтың [16, 17] жұмыстарында зерттелді. Соңғы жылдары күшті сингулярлық коэффициенттері бар толқын теңдеу үшін Коши есебінің дұрыс қойылуы М. Ружанский, Н. Тоқмағамбетовтің [18] жұмыстарында қарастырылғын. Сондай-ақ көптеген өзекті зерттеулерді М.М. Смирновтың [19], И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов [20], Е.В. Радкевич, О.А. Олейник [21] және М. Ружанский, М. Садыбеков, Д. Сұраған [22] монографияларынан табуға болады.

Цилиндрлік облыстағы аралас Коши есебін зерттеуде бүйірлік шекаралық шарттар әдетте Дирихле шарты түрінің локалды шекаралық шарттары немесе периодтық шекаралық шарттар арқылы беріледі.

Т.Ш. Кәлменов пен Д. Сұрағанның [2, 16-18 бет] жұмысында алғаш рет Ньютон (көлем) потенциалының шекаралық шарты табылды, бұл Лаплас теңдеуі үшін жаңа интегро-дифференциалды өз-өзіне түйіндес шекаралық шарт болып табылады. “Осы бүйірлік шеттік шартпен қойылған сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулер үшін аралас Коши есебіннің шешімі қандай класта болады?” – деген сұрақ туындайды.

Коши есебі қатаң гиперболалық теңдеулер үшін қисынды қойылғаны белгілі. Ал азғындалған гиперболалық теңдеу үшін Коши есебінің қисындылығы бұзылады, яғни гиперболалық теңдеу сипаттауыш сызық бойында азғындалса немесе гиперболалық теңдеудің кіші мүшелеріндегі коэффициенттері сингуляр болса бұл гиперболалық теңдеу үшін Коши есебі қисынды болмайды. Сондықтан бастапқы шарттар салмақтық функциялармен берілген, «түрлендірілген» Коши есебін қарастыру әлдеқайда табиғи болып саналады.

Кеңею теориясы – симметриялы оператордың кеңеюлері туралы мәселе алғаш рет И. Нейманның [23] еңбегінен бастау алады. Кейінірек симметриялы операторлардың кеңею теориясы дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық есептер теориясында және анализде қолданысын тапты. Қазір бұл бағытта бірқатар авторлардың еңбектері белгілі [24-34].

М.И. Вишик [35, 36] бастапқы оператордың симметриялы болуы туралы талаптан бас тартып, оның кеңеюін қарастырды. М.И. Вишик өзінің нәтижелерін екінші ретті эллиптикалық дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы шекаралық есептерді зерттеуге қолданды.

А.А. Дезин еңбектерінде [37-40] дифференциалдық операторлар үшін шекаралық есептерді дұрыс қою мәселелерін және тұрақты коэффициенттері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін және математикалық физиканың «классикалық емес» теңдеулері үшін кеңеюлер мен тарылу теориясының спецификалық қасиеттері зерттеді.

Келесі кезекте Т.Ш. Кәлменов пен М.О. Өтелбаевтың енбектерін баса атап өту керек, мұнда Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін шекаралық шарттар тұрғысынан регулярлы кеңеюлердің сипаттамасы алынды. Бұл жұмыс Т.Ш. Кәлменовтың келесі [41-43] жұмыстарында гиперболалық және аралас типті теңдеулерге қатысты жалғасын тапты. Банах кеңістігіндегі операторлардың (сызықты болуы міндетті емес) қисынды кеңеюлері мен тарылулары туралы сұрақтарды алғаш рет М. Өтелбаев пен А. Шыныбеков [44] жұмысында зерттеген. Содан кейін Б.Қ. Көкебаев пен М. Өтелбаев [45, 46] жұмыстарында Банах кеңістігіндегі қалыпты шешілімді оператордың тарылуын сипаттады. Гипонормалды және десипативті кеңею мен тарылу мәселесі [47-49] жұмыста қаралған.

Т.Ш. Кәлменов пен М.О. Өтелбаевтың [1, 395 бет] жұмысында дифференциалдық теңдеуге сәйкес қисынды шеттік шарттарды қанағаттандыратын интегралдық оператордың нақты мәнді өзегіне шарттар тапты. Осы жұмыстың нәтижелерін негізге ала отырып азғындалған теңдеулер үшін осы теорияны қолдану - кеңею және тарылу теориясынның қолданысын одан әрі дамыту үшін қажет.

Осы тақырып бойынша отандық және шетелдік математиктер алған елеулі нәтижелердің айтарлықтай санына қарамастан, азғындалған гиперболалық теңдеулерге жалпы регулярлы есептердің теориясының қолданысын одан әрі дамытуды талап етеді. Сондықтан мұндай теңдеулердің қарапайым жағдайларын қарастыру да теорияны құрудың маңызды элементі болып табылады және ерекше қызығушылық тудырады.

Таңдалған зерттеу тақырыбының өзектілігі жоғарыда келтірілген осы бағыттағы зерттеулердің қарқынды дамуы және де қазіргі уақытта азғындалған гиперболалық теңдеулер бойынша көптеген жұмыстардың Web of Science, Scopus, MathSciNet және басқа да беделді халықаралық базаларында жариялануы дәлел бола алады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулер үшін аралас Коши есебінің шешімін классикалық Соболев кеңістігінде анықтау және азғындалған гиперболалық теңдеулердің аналогы болып табылатын қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін регулярлы жалпы шекаралық шарт табу.

Диссертациялық жұмыстың мақсатына жету үшін **зерттеудің** келесі **негізгі міндеттері** қарастырылған:

1. Азғындалған гиперболалық теңдеулердің аналогы болып табылатын қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы регулярлы шеттік есептер;
2. Эйлер-Пуассон-Дарбу теңдеуі типті гиперболалық теңдеуі үшін Ньютон (көлемдік) потенциалының шеттік шартын пайдалана отырып, бастапқы шарттары салмақтық функциялармен берілген, «түрлендірілген» Коши есебі;
3. Сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас Коши есебі: а) Сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулерге бүйірлік шекаралық шартты аралас Коши есебінің $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$ жағдайын зерттеу; ә) Коши есебінің жалпы жағдайын зерттеу.

Зерттеу нысаны – Ньютон потенциалының шекаралық шартын пайдалана отырып, сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулер үшін аралас Коши есебі, Эйлер-Пуассон-Дарбу теңдеуі типті гиперболалық теңдеуі үшін түрлендірілген Коши есебі және минималды операторлардың регулярлы кеңею теориясын пайдаланып азғындалғын қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы регулярлы шеттік есептер.

Зерттеу әдістері. Осы тақырып бойынша зерттеулер жүргізу үшін математика ғылымындағы жаңа идеялармен қатар қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, математикалық физика теориясының әдістері пайдаланылады.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Ньютон (көлемдік) потенциалының шеттік шартын пайдалана отырып, сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас Коши есебі зерттелінген. Қарастырылып отырған есептердің әртүрлі бүйірлік шеттік шарттары бар аралас Коши есебінің шешімдері салмақты кеңістіктерде алынған еді, ал осы тақырыпқа арналған басқа жұмыстардан айырмашылығы, бұл диссертациялық жұмыста зерттелген аралас Коши есептерінің барлық шешімдері классикалық Соболев кеңістігінде алынған.

Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңыздылығы. Зерттеу тақырыбы негізінен теориялық және іргелі болып табылады, олардың ғылыми маңыздылығы бастапқы және шеттік есептердің қисындылық теориясының терең, заманауи нәтижелерін қолдану және зерттеу мен талдаудың жаңа өзіндік әдістерін құрумен байланысты.

Қорғауға ұсынылатын негізгі ғылыми нәтижелері. Азғындалған гиперболалық теңдеулердің аналогы болып табылатын қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы регулярлы шеттік есептер зерттелді. Эйлер-Пуассон-Дарбу теңдеуі типті гиперболалық теңдеуі үшін Ньютон (көлемдік) потенциалының шеттік шартын пайдалана отырып, бастапқы шарттары салмақтық функциялармен берілген, «түрлендірілген» Коши есебі зерттелді, барлық шешімдері салмақтық Соболев кеңістігінде алынды. Сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас Коши есебі зерттелді, барлық шешімдер классикалық Соболев кеңістігінде анықталды.

Бұл жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс «Гиперболалық теңдеулер мен жүйелердің кейбір кластары үшін қисынсыз және кері есептер», (2021-2023, №AP09260126) «Эллипстік және параболалық теңдеулер үшін көпөлшемді Коши есебінің спектрлік талдауы» (2020-2022, РК№AP08856042) және «Аралас типті операторлардың минималдылық критериі» (2021-2024, РК№AP14871460) тақырыптарындағы ҚР БҒМ жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулерді гранттық қаржыландыру жобалары және «Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің белгілі бір кластарының шешімдері үшін априорлық бағалаулар» (2021-2024, РК№AP14971679) «Жас ғалым» жобасы бойынша жас ғалымдардың зерттеулерін гранттық қаржыландыру шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі. Диссертацияда алынған барлық нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынды. Ғылыми кеңесшілер есептің қойылымына, негізгі бағыт-бағдар беруге және алынған нәтижелерді талқылауға өз үлестерін қосты.

Диссертацияның сынақтан өтуі мен талқылануы. Диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер: «Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day» атты конференциясында (Алматы, 2018), Современные методы теории краевых задач: международная конференция «Понтрягинские чтения - XXIX», посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина атты конференциясында (Москва, 2018), Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics атты конференциясында (Turkey, 2018), International Conference "Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra" конференциясында (Nur-Sultan, 2019), ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Кәлменов, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі., ф.-м. ғ.д., профессор М. А. Садыбеков, ф.-м. ғ.д., профессор Б.Е. Кангужин жетекшілігімен, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ механика-математика факультетінің «Дифференциалдық операторлар және олардың қолданыстары» қалалық ғылыми-зерттеу семинарында баяндалып талқыланды.

Диссертация тақырыбы бойынша 6 жұмыс, соның ішінде 3 жарияланым Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт-факторы бар шетелдік журналдарда, 3 жарияланым ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда жарияланды.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 3 тараудан, қорытынды және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың көлемі – 77 бет. Әдебиеттер саны – 55.

Бірінші тарау. М. Өтелбаев пен оның шәкірттері кері оператор мағынасында, минималды оператордың қандай-да бір қисынды кеңеюін пайдалана отырып, минималды оператордың барлық регулярлы (шекаралық қисынды) кеңеюлерін сипатайтын абстракты теоремасын дәлелдеді. Әлбетте, бұл теорема максимал оператордың барлық мүмкін шекаралық қисынды тарылуларын да сипаттай алды. Т.Ш. Кәлменов пен Д. Сұрағанның [2, 16-18 бет; 3, 595-598 бет; 4, 1063-1067 бет; 5, 187-209 бет] жұмыстарында полигармониялық потенциал үшін, Рисс потенциалы үшін және басқа классикалық операторлар үшін шекаралық шарттар табылады (сонымен қатар [50-52]). Жылу потенциалдары үшін ұқсас нәтиже [5, 187-209 бет] жұмысында алынды. Осы мысалдардың барлығында интегралдық операторлар сәйкес дифференциалдық теңдеулердің шешімдері болып табылады. Бұл интегралдық операторлардың бірегейлігі шекаралық шартпен анықталады. Осы жұмыстарда табылған әдістерді пайдаланып, кеңею және тарылу теориясының абстракты теоремасын азғындалған теңдеулердің бір өлшемді аналогтары үшін бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеулердің жалпы регулярлы шекаралық шартын табу үшін қолданамыз.

Әрі қарай, **екінші тарауда** бірінші тараудың нәтижелерін кеңейте отырып, екінші дәрежелі әлсіз сингулярлы коэффиценті бар қарапайым дифференциалдық теңдеулердің жалпы регулярлы шекаралық шарты туралы мәселесі зерттелді. Қарастырылған теңдеулер үшін жалпы түрдегі шекаралық шарты табылды. Азғындалған гиперболалық теңдеу үшін жалпы регулярлы шеттік есепті қарастыру үшін алдымен

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u\right) - \Delta_x u = f(x,t)$$

теңдеуі үшін Ньютон (көлем) потенциалының шекаралық шартымен қойылған Коши есебін зерттедік. Бұл теңдеуді Эйлер-Пуассон-Дарбу теңдеуіне келтіруге болатыны белгілі [13, 60 бет].

Үшінші тарау. Т.Ш. Кәлменов пен Д. Сұрағанның [2, 16-18 бет] жұмысында Ньютон потенциалы (көлемдік потенциал) - келесі өз-өзіне түйіндес интегралдық оператормен берілген

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x,\xi)\rho(\xi)d\xi, \tag{1}$$

мұнда $\rho(\xi) \in L_2(\Omega)$, және $\varepsilon(x,\xi)$ функциясы

$$-\Delta_x \varepsilon(x,\xi) = \delta(x-\xi), \;\; \varepsilon(x,\xi) = \varepsilon(\xi,x), \tag{2}$$

Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі.

Т.Ш. Кәлменов пен Д. Сұрағанның бұл жұмысында, біріншіден, $u(x)$ функциясы келесі

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_{\xi}}(x-\xi)u(\xi) - \varepsilon(x-\xi)\frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi)\right)d\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{3}$$

f −ке тәуелсіз шекаралық шартын қанағаттандыратыны көрсетілген.

Екіншіден, керісінше тұжырымның дұрыстығы көрсетілген. Яғни, $u \in W_2^2(\Omega)$, функциясы Пуассон теңдеуін

$$-\Delta u = \rho(x), \; x \in \Omega \tag{4}$$

қанағаттандыратыны және (3) шекаралық шартын қанағаттандыратыны, бірмәнді табылатындығы және көлемдік (Ньютон) потенциал (1) арқылы берілетіні алғаш рет көрсетілген. Біз осы жұмыста алынған Ньютон (көлем) потенциалының шекаралық шартын пайдалана отырып, сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін төмендегі аралас Коши есебін зерттейміз:

$$Lu = u_{tt} - k(t)\Delta_x u + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(t)u = f(x,t) \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = 0, \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{6}$$

$$N[u] \equiv -\frac{u(x,t)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_\xi}(x,\xi) \cdot u(\xi,t) - \varepsilon(x,\xi) \cdot \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t) \right) d\xi = 0, \quad (7)$$
$$0 < t < T,\ x \in \partial\Omega,$$

мұнда $k \in C^{1+\alpha}[0,T]$, $0 < \alpha < 1$, $k(t) > 0$, $t > 0$, $k(0) = 0$, $k'(t) \geq 0$, және $\varepsilon(x,\xi)$ функциясы (2) теңдеудің іргелі шешімі.

Осы тақырыпқа арналған басқа жұмыстардан айырмашылығы, бұл жұмыста қарастырылатын аралас Коши есептерінің барлық шешімдері классикалық Соболев кеңістігінде анықталды. Ал $\frac{f}{k} \in L_2(D)$ шарты - қойылған есептің Соболев кеңістігіндегі шешілімділігі толқын теңдеуінің шешілімдігімен бірдей болатынын қамтамасыз ететді. Осы бөлімде алынған негізгі нәтижелер [49, 1-10 бет] жұмысында жарияланды.

Қорытынды бөлімінде біз зерттеу барысында алынған нәтижелерін қорытындылап, әрі қарай дамыту бағытына нұсқаулықтар ұсынамыз.

1 АЗҒЫНДАЛҒАН ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ АНАЛОГЫ БОЛЫП ТАБЫЛАТЫН БІРІНШІ РЕТТІ ҚАРАПАЙЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ЖАЛПЫ РЕГУЛЯРЛЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

1.1 Қажетті анықтамалар мен белгілі фактілер

Тегіс $\partial\Omega$ шекарасы ақырлы $\Omega \subset R^n$ обылысында

$$L(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \qquad (1.1.1)$$

және оған (1.1.2) формалды түйіндес

$$L^+(x, D)v \equiv \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) v) = g(x) \qquad (1.1.2)$$

теңдеуін қарастырайық.

L_0 және L_0^+ арқылы $u \in C_0^\infty(\Omega)$ және $v \in C_0^\infty(\Omega)$ финитті функциялар жиынында сәйкесінше (1.1.1)-(1.1.2) өрнектерімен берілген дифференциалдық операторларының $L_2(\Omega)$ кеңістігіндегі тұйықталуын белгілейік. Ал, L_0^* және $(L_0^+)^*$ сәйкесінше олардың түйіндес операторлары. L_0 және L_0^+ минимал операторлар, ал, L_0^*, $(L_0^+)^*$ - *максимал* операторлар .

Егер $L \subset (L_0^+)^*$ болса және кеңістіктің барлық нүктесінде анықталғын кері L^{-1} операторы табылып $\|L^{-1}\| < \infty$ болса L −операторы $(L_0^+)^*$ операторының *қисынды тарылуы* деп аталады.

Басқаша айтқанда, максимал $(L_0^+)^*$ операторының L қисынды тарылуы - (1.1.1) теңдеу және кейбір қосымша шарттар арқылы туындатылған keріленетін дифференциалдық оператор.

Егер $L_0 \subset L$ болса және кеңістіктің барлық нүктесінде анықталғын кері L^{-1} операторы табылып $\|L^{-1}\| < \infty$ болса, онда L операторы L_0 минимал операторының *қисынды кеңеюі дейміз.*

Егер келесі екі шарт орындалса L операторы L_0 операторының *регулярлы* (немесе шекаралық қисынды) *кеңеюі* деп аталады:

$$\text{а) } L_0 \subset L \subset (L_0^+)^*,$$

$$\text{б) } \|L^{-1}\| < \infty.$$

М. Өтелбаев пен оның шәкірттері кері оператор мағынасында, минималды оператордың қандайда бір қисынды кеңеюін пайдалана отырып, минималды оператордың барлық регулярлы (шекаралық қисынды) кеңеюлерін сипатайтын абстракты теоремасын дәлелдеді. Әлбетте, бұл теорема максимал оператордың барлық мүмкін шекаралық қисынды тарылуларын да сипаттай алды. Осы теореманың негізгі түйінін келтірейік [45, 91-95 бет; 46, 227-228 бет].

Теорема. L_ϕ – операторы $(L_0^+)^*$ максимал операторының қандайда бір белгілі қисынды тарылуы болсын. Ал $K: L_2(\Omega) \to \ker(L_0^+)^*$ операторы $L_2(\Omega)$-де шенелген сызықты операторы болсын, онда

$$u = L_K^{-1} f = L_\phi^{-1} f + Kf \tag{1.1.3}$$

формуласы $(L_0^+)^*$ максимал операторының барлық мүмкін L_K қисынды тарылуына кері операторын сипаттайды, яғни $L_\text{K} \subset (L_0^+)^*$.

Сонымен қатар, L_ϕ – операторы L_0 минимал операторының қандайда бір белгілі қисынды кеңеюі болсын. Ал $L_2(\Omega)$-де шенелген сызықты K операторы $R(L_0) \subset Ker\, K$ және $Ker\,(L_K^{-1} + K) = \{0\}$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда (1.1.3) формуласымен анықталған L_K^{-1} операторы минимал оператордың барлық мүмкін қисынды кеңеюіне кері операторды сипаттайды.

L_ϕ – операторы L_0 минимал операторының қандайда бір белгілі шекаралық қисынды кеңеюі болсын, яғни $L_0 \subset L \subset (L_0^+)^*$. Ал $L_2(\Omega)$-де шенелген сызықты K операторы $R(L_0) \subset Ker\, K$ және $R(K) \subset Ker\,(L_0^+)^*$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда (1.1.3) формуласымен анықталған L_K^{-1} операторы минимал оператордың барлық мүмкін шекаралық қисынды кеңеюіне кері операторды сипаттайды.

Айта кету керек, минимал оператордың кем дегенде бір шекаралық қисынды кеңеюі бар екенін М.И. Вишик дәлелдеген.

1.2 Бірінші дәрежелі әлсіз азғындалған қарапайым дифференциалдық теңдеудің қарапайым түрлері үшін жалпы регулярлы шекалық шарт табу мәселелері және Коши есебінің қойылуы

Бұл бөлімде бірінші дәрежелі қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін әлсіз сингулярлы теңдеулерге жалпы шекаралық шарт табу мәселесін қарастырамыз. Бұл мақсатқа жету үшін ең алдымен азғындалған теңдеулердің қарапайым түрлерін $(0,1)$ интервалында $\lambda \geq 0$ үшін қарастырайық.

Есептің қойылуы: $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, $x \in (0,1)$ және $f \in L_2(0,1)$ болсын, онда

$$x^\alpha \frac{d}{dx} y(x) + \lambda y(x) = f(x),\ \lambda \geq 0\ ,\ x \in (0,1) \tag{1.2.1}$$

теңдеуі үшін жалпы шекаралық шартын тап.

Бұл теңдеу үшін жалпы шекаралық шарт табу үшін қарапайым жағдайларын қарастырайық.

1-жағдай**.** $\lambda = 0,\ \ 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ және $f \in L_2(0,1)$ болсын, онда төмендегі теңдеудің жалпы шекаралық шартын тап:

$$x^\alpha \frac{d}{dx} y(x) = f(x),\ \ x \in (0,1). \tag{1.2.2}$$

Алдымен бұл теңдеудің жалпы шешімін табайық. $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ болғандықтан $\frac{1}{x^\alpha} \in L_2(0,1)$, ал $f \in L_2(0,1)$ болғандықтан $x^\alpha \frac{d}{dx} y \in L_2(0,1)$, онда (1.2.2) теңдеуін келесі түрде жазып алайық

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{f(x)}{x^{\alpha}}.$$

Теңдеудің екі жағын да 0 мен x −аралығында интегралдайық

$$\int_0^x \frac{d}{dx}y(t)dt = \int_0^x \frac{f(t)}{x^{\alpha}}dt.$$

Бұл теңдіктің сол жағындағы интеграл оңай есептелінеді, яғни

$$y(x) - y(0) = \int_0^x \frac{f(t)}{t^{\alpha}}dt$$

теңдігін аламыз, демек $y(0) = c$ екенін ескере отырып (1.2.2) теңдеуінің жалпы шешімін келесі түрде жаза аламыз

$$y(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t^{\alpha}}dt + c. \quad (1.2.3)$$

Коши есебінің қойылуы: (1.2.2) теңдеуінің

$$y(0) = 0 \quad (1.2.4)$$

шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар:

$$y(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t^{\alpha}}dt. \quad (1.2.5)$$

Енді осы Коши есебіне түйіндес есепті табайық. Ол үшін $\langle x^{\alpha}\frac{d}{dx}y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)}$ скаляр көбейтіндісін қарастырайық:

$$\langle x^{\alpha}\frac{d}{dx}y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)} = \langle\frac{d}{dx}y(x), x^{\alpha}v(x)\rangle$$
$$= x^{\alpha}v(x)y(x)|_0^1 - \langle y(x), \frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}v(x)\right)\rangle.$$

Бұдан $v(1) = 0$ болғанда Коши есебінің түйіндес есебі келесі түрде болады

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}v(x)\right) = g(x), \\ v(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

$g \in L_2(0,1)$ функциясы үшін $\langle y(x), g(x)\rangle_{L_2(0,1)}$ скаляр көбейтіндісін қарастырайық.

$$\begin{aligned}\langle L^{-1}f(x), g(x)\rangle_{L_2(0,1)} &= \langle \int_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha}dt + \int_0^1 \sigma(t)f(t)dt, g(x)\rangle_{L_2(0,1)} \\ &= \int_0^1 g(x)\int_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha}dtdx + \int_0^1 g(x)\int_0^1 \sigma(t)f(t)dtdx \\ &= \int_0^1 \left(-\int_1^x \frac{f(x)}{x^\alpha}g(t)dt\right)dx + \int_0^1 f(x)\sigma(x)\int_0^1 g(t)dt\,dx \\ &= \langle f(x), -\frac{1}{x^\alpha}\int_1^x g(t)dt + \sigma(x)\int_0^1 g(t)dt\rangle_{L_2(0,1)} \\ &= \langle f(x), (L^{-1})^* g(t)\rangle_{L_2(0,1)}.\end{aligned}$$

Енді төмендегі біртекті теңдеуді қарастырайық

$$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha v(x)\right) = 0,$$

Оның шешімі

$$x^\alpha v(x) = q;$$

онда

$$v(x) = \frac{q}{x^\alpha},$$

мұндағы $q -$ кез келген тұрақты сан, ал $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$.

Ал $-\frac{d}{dx}\left(x^\alpha v(x)\right) = g(x)$ теңдеуінің жалпы шешімі:

$$v(x) = -x^{-\alpha}\int_1^x g(t)dt + \frac{q}{x^\alpha} \qquad (1.2.7)$$

Енді (1.2.2) теңдеуінің жалпы шешіміне оралайық. Біз $f -$ке үзіліссіз тәуелді шешімді іздейтіндіктен (1.2.2) теңдеуінің жалпы шешіміндегі тұрақты c саны $c = c(f)$, $f -$ке үзіліссіз тәуелді. Яғни, $c = c(f)$ тұрақтысы $L_2(0,1)$ гильберт кеңістігінде $f -$ке тәуелді сызықты үзіліссіз функционал болып табылады. Бұдан, Рисс теоремасы бойынша

$$c=\int_0^1 \sigma(t)f(t)dt$$

болатындай $\sigma \in L_2(0,1)$ табылады. Онда (1.2.2) теңдеуінің жалпы шешімі келесі түрге ие

$$y(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha}dt+c=\int_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha}dt+\int_0^1 \sigma(t)f(t)dt. \qquad (1.2.8)$$

Т.Ш. Кәлменов, М. Өтелбаевтың [1, 395 бет] жұмысынан $\sigma(t)$ функциясы түйіндес біртекті оператордың өзегінде жататыны белгілі (бұны жоғарыдағы скаляр көбейтіндіден де байқау қиын емес), яғни ол түйіндес біртекті есептің шешімі болады, демек $\sigma(t)=\frac{q}{t^\alpha}$.

Онда (1.2.8) теңдігіндегі интегралды $f(t)=t^\alpha y'(t)$ теңдігімен алмастырып есептесек

$$y(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha}dt+\int_0^1 \frac{q}{t^\alpha}f(t)dt=\int_0^x \frac{t^\alpha y'(t)}{t^\alpha}dt+\int_0^1 \frac{q}{t^\alpha}t^\alpha y'(t)dt$$
$$=y(t)|_0^x+qy(t)|_0^1=y(x)-y(0)+qy(1)-qy(0);$$

теңдігін аламыз, демек (1.2.2) түріндегі теңдеу үшін жалпы шекаралық шарт келесі түрде болады

$$(q+1)y(0)=qy(1); \qquad (1.2.9)$$

мұндағы $q-$ кез келген тұрақты сан. Жоғарыда алынған нәтижелерді қортындылап, келесі лемманы аламыз:

1.1.1 - Лемма $0\le\alpha<\frac{1}{2}$ болсын. Онда кез келген $f\in L_2(0,1)$ және $q\in\mathbb{R}$ үшін (1.2.2) теңдеуінің (1.2.9) шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі $L_2(0,1)$ норма бойынша үзіліссіз.

2-жағдай. Тұрақты $\lambda>0$ саны үшін төменде берілген теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$x^\alpha \frac{d}{dx}y(x)+\lambda y(x)=f(x),\ x\in(0,1) \qquad (1.2.10)$$

мұнда $0\le\alpha<\frac{1}{2},\ 0<\lambda-const.$

Алдымен (1.2.10) теңдеуінің біртекті жағдайының шешімін табайық

$$x^\alpha \frac{d}{dx}y(x)+\lambda y(x)=0,$$

$$x^{\alpha}\frac{d}{dx}y(x) = -\lambda y(x),$$

$$\frac{dy(x)}{y(x)} = -\frac{\lambda}{x^{\alpha}}dx,$$

мұнда $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, ал $\frac{1}{x^{\alpha}} \in L_2(0,1)$ екені айқын.
бұл теңдіктің екі жағын да 0 мен x −аралығында интегралдайық

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)}dt = -\int_0^x \frac{\lambda}{t^{\alpha}}dt,$$

$$ln\left(\frac{y(x)}{y(0)}\right) = -\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

онда теңдеуінің біртекті теңдеуі үшін жалпы шешімі келесі түрге ие

$$y_0(x) = ce^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}. \qquad (1.2.11)$$

Біртекті емес теңдеулерді шешуге арналған белгілі әдіс - Лагранж әдісін пайдаланып, тұрақты c шамасын көмекші $c(x)$ функциясына алмастырып (1.2.9) теңдеуінің жалпы шешімін іздейік

$$y(x) = c(x)\, e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}. \qquad (1.2.12)$$

Онда

$$\frac{d}{dx}y(x) = c'(x)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} - c(x)\frac{\lambda}{x^{\alpha}}\, e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}.$$

Соңғы өрнекті теңдеуге қойсақ

$$\begin{aligned} x^{\alpha}\frac{d}{dx}y(x) + \lambda y(x) &= x^{\alpha}\left[c'(x)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} - c(x)\frac{\lambda}{x^{\alpha}}\, e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\right] + \lambda c(x)\, e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \\ &= x^{\alpha}c'(x)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} - \lambda c(x)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} + \lambda c(x)\, e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \\ &= x^{\alpha}c'(x)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

демек

$$x^{\alpha}c'(x)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} = f(x); \quad \Rightarrow \; c'(x) = \frac{e^{\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}}{x^{\alpha}}f(x);$$

$$\int_0^x c'(t)dt = \int_0^x \frac{e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}}{t^{\alpha}} f(t)dt;$$

Интегралды есептесек белгісіз $c(x)$ функциясын келесі түрде табылады

$$c(x) = \int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} t^{-\alpha} f(t)dt + c. \quad (1.2.13)$$

мұнда c тұрақты сан, енді $c(x)$ функциясын бағалайық

$$|c(x)| = \left| \int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} t^{-\alpha} f(t)dt + c \right| \leq \int_0^1 |t^{-\alpha}| \cdot \left| e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} f(t) \right| dt + |c|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |t^{-2\alpha}| dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left| e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} f(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} + |c|;$$

ал $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, $0 < t < 1$, үшін $e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}$, демек

$$|c(x)| \leq \left(\int_0^1 |t^{-2\alpha}| dt \right)^{1/2} \left(e^{\frac{2\lambda}{1-\alpha}} \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} + |c|$$

$$\leq \frac{e^{\frac{2\lambda}{1-\alpha}}}{\sqrt{1-2\alpha}} \|f(t)\|_{L_2(0,1)} + |c|.$$

Онда

$$|y(x)| \leq \mathrm{c}\|f(t)\|_{L_2(0,1)} < \infty.$$

Ендеше (1.2.10) теңдеуінің жалпы шешімін келесі айқын түрде жаза аламыз

$$y(x) = e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} t^{-\alpha} f(t)dt + c e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}.$$

Коши есебінің қойылуы: (1.2.10) теңдеуінің

$$y(0) = 0$$

шартын қанағаттандыратын шешімі $y(x) = e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} t^{-\alpha} f(t)dt.$

Коши есебіне түйіндес есепті табайық. Ол үшін $\langle x^\alpha y'(x)+\lambda y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)}$ скаляр көбейтіндісін қарастырайық:

$$\begin{aligned}\langle x^\alpha y'(x)+\lambda y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)} &= \langle x^\alpha y'(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)} + \langle \lambda y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)}\\ &= \langle y'(x), x^\alpha v(x)\rangle_{L_2(0,1)} + \langle y(x), \lambda v(x)\rangle_{L_2(0,1)}\\ &= x^\alpha v(x)y(x)|_0^1 - \langle y(x), (x^\alpha v(x))'\rangle_{L_2(0,1)} + \langle y(x), \lambda v(x)\rangle_{L_2(0,1)}\\ &= x^\alpha v(x)y(x)|_0^1 + \langle y(x), -\left(x^\alpha v(x)\right)' + \lambda v(x)\rangle_{L_2(0,1)};\end{aligned}$$

$v(1)=0$ болғанда түйіндес теңдеу келесі түрде болатынын анықтаймыз

$$\begin{cases}-\frac{d}{dx}(x^\alpha v(x))+\lambda v(x)=\mathrm{g}(x),\\ v(1)=0.\end{cases} \tag{1.2.14}$$

(1.2.14) есебінің жалпы шешімін табу үшін алдымен оның біртекті теңдеуінің шешімін табайық, яғни

$$-x^\alpha v'(x)+(\lambda-\alpha x^{\alpha-1})v(x)=0;$$

$$\frac{v'(x)}{v(x)}=\frac{\lambda-\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha};$$

бұл теңдіктің екі жағын да 1-ден x —аралығында интегралдасақ

$$\int_1^x \frac{v'(t)}{v(t)}dt=\int_1^x \frac{\lambda-\alpha t^{\alpha-1}}{t^\alpha}dt$$

демек біртекті теңдеудің жалпы шешім келесі түрге ие

$$v_0(x)=qx^{-\alpha}e^{\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}.$$

Осы тараудағы алдыңғы бөлімдеріндегідей (1.2.10) теңдеуінің жалпы шешімін тұрақты c санының f —ке және түйіндес біртекті есептің шешіміне қатысты қатынасын ескере отырып, келесі түрде анықтаймыз

$$\begin{aligned}y(x)&=e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}t^{-\alpha}f(t)dt+ce^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\\ &=e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}t^{-\alpha}f(t)dt+e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^1 qt^{-\alpha}e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}f(t)dt.\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Жалпы шекаралық шарт табайық, ол үшін (1.2.15) интегралдың ішіндегі $f(t)$ функциясының орнына $x^{\alpha}y'(t)+\lambda y(t)$ өрнегін қойып, бөліктеп интегралдау әдісін қолданып интегралды есептейік

$$y(x)=e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}t^{-\alpha}f(t)dt+e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^1 qt^{-\alpha}e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}f(t)dt$$

$$=e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}t^{-\alpha}\big(t^{\alpha}y'(t)+\lambda y(t)\big)dt$$

$$+e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^1 qt^{-\alpha}e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\big(t^{\alpha}y'(t)+\lambda y(t)\big)dt=$$

$$=e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}y'(t)dt+\lambda e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}t^{-\alpha}y(t)dt$$

$$+e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^1 qt^{-\alpha}e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\big(t^{\alpha}y'(t)+\lambda y(t)\big)dt$$

$$=e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}e^{\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}y(x)-y(0)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}-e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x \lambda e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}t^{-\alpha}y(t)dt$$

$$+e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_0^x \lambda t^{-\alpha}e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}y(t)dt+qe^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\left(e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}y(1)-y(0)\right)$$

$$-qe^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_1^1 \lambda e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}t^{-\alpha}y(t)dt+qe^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\int_1^1 \lambda t^{-\alpha}e^{\frac{\lambda t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}y(t)dt$$

$$=y(x)-y(0)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}+qe^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\left(e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}y(1)-y(0)\right);$$

Жоғарыдағы теңдіктің екі жағындағы бірдей мүшелерін жойылады, онда

$$-y(0)e^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}+qe^{-\frac{\lambda x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\left(e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}y(1)-y(0)\right)=0$$

екені шығады. Сызықты тәуелсіз мүшелерінің алдындағы коэффиценттерін нөлге теңестірсек

$$(q+1)y(0)=qe^{\frac{\lambda}{1-\alpha}}y(1) \qquad (1.2.16)$$

шарттарын табымыз. Бұл шарт (1.2.10) теңдеуінің жалпы шекаралық шарты болып табылады. Бұл шекаралық шарттан байқағанымыздай, $\lambda=0$ болса 1-

жағдайдың шартымен беттеседі, ал $\alpha = 1$ болса жалпы шекаралық шарт табылмайтынын көруге болады, атап айтқанда $f \in L_2(0,1)$ болуы жеткіліксіз.

1.1.2 - Лемма $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ және $\lambda > 0$ болсын. Онда кез келген $f \in L_2(0,1)$ және әрбір $q \in \mathbb{R}$ үшін (1.2.10) теңдеуінің $y \in W^1_{2,x^\alpha}(0,1)$ шешімі (1.2.16) шартын және келесі теңсіздікті қанағаттандыратды

$$\|y\|_{W^1_{2,x^\alpha}(0,1)} = \left\| x^\alpha \frac{d}{dx} y \right\|_{L_2(0,1)} + \|y\|_{L_2(0,1)} \leq \mathrm{c}\|f\|_{L_2(0,1)}, \ \ c = const < \infty.$$

Дәлелдеуі. (1.2.10) теңдеуінің шешімі (1.2.16) шартын қанағаттандыратыны айқын. Ал $\|y\|_{L_2(0,1)} \leq \mathrm{c}_1\|f\|_{L_2(0,1)}$ бағалауы (1.2.13) $c(x)$ функциясының бағалауынан шығады. Онда

$$x^\alpha \frac{d}{dx} y(x) = f(x) - \lambda y(x)$$

болғандықтан

$$\left\| x^\alpha \frac{d}{dx} y \right\|_{L_2(0,1)} \leq \|f\|_{L_2(0,1)} + |\lambda|\|y\|_{L_2(0,1)} \leq \|f\|_{L_2(0,1)} + \mathrm{c}_1|\lambda|\|f\|_{L_2(0,1)}.$$

Демек

$$\|y\|_{W^1_{2,x^\alpha}(0,1)} = \left\| x^\alpha \frac{d}{dx} y \right\|_{L_2(0,1)} + \|y\|_{L_2(0,1)} \leq \mathrm{c}\|f\|_{L_2(0,1)}, \ \ c = const < \infty.$$

1.1.2 - Лемма дәлелденді.

3-жағдай $\lambda \in C[0,1]$.

$$x^\alpha \frac{d}{dx} y(x) + \lambda(x) y(x) = f(x), \ x \in (0,1), \ \lambda \in L_2(0,1). \qquad (1.2.17)$$

мұнда $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

Алдымен (1.2.17) теңдеуінің біртекті жағдайын қарастырайық, оның шешімін табайық:

$$x^\alpha y'(x) + \lambda y(x) = 0,$$

$$x^\alpha y'(x) = -\lambda(x) y(x),$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{\lambda(x)}{x^\alpha}, x \neq 0$$

бұл теңдіктің екі жағын да 0-ден x —аралығында интегралдайық

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)}dt = -\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt,$$

онда теңдеуінің біртекті теңдеуі үшін жалпы шешімі келесі түрге ие

$$y_0(x) = ce^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}. \tag{1.2.18}$$

Біртекті емес теңдеулерді шешуге арналған белгілі әдіс - Лагранж әдісін пайдаланып, тұрақты c шамасын көмекші $c(x)$ функциясына алмастырып (1.2.17) теңдеуінің жалпы шешімін іздейік

$$y(x) = c(x)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}. \tag{1.2.19}$$

Онда

$$\frac{d}{dx}y(x) = c'(x)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt} + c(x)\left(-\frac{\lambda(x)}{x^\alpha}\right)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}.$$

Табылған өрнектерді теңдеудің орнына қойсақ

$$\begin{aligned} x^\alpha \frac{d}{dx}y(x) + \lambda(x)y(x) \\ &= x^\alpha\left[c'(x)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt} + c(x)\left(-\frac{\lambda(x)}{x^\alpha}\right)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\right] \\ &+ \lambda(x)c(x)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt} = x^\alpha c'(x)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt} = f(x), \end{aligned}$$

онда

$$x^\alpha c'(x)e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt} = f(x)$$

$$c'(x) = x^{-\alpha}e^{\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}f(x)$$

$$\int_0^x c'(t)dt = \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha}d\xi}t^{-\alpha}f(t)dt$$

$$c(t) = \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha}d\xi}t^{-\alpha}f(t)dt + c. \tag{1.2.20}$$

мұнда c тұрақты сан.

(1.2.20) өрнегін (1.2.19) өрнегіне қойып, (1.2.17) теңдеуінің жалпы шешімін келесі түрде жазамыз

$$y(x) = e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha}d\xi} t^{-\alpha} f(t)dt + ce^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}.$$

Коши есебінің қойылуы: (1.2.17) теңдеуінің

$$y(0) = 0$$

шартын қанағаттандыратын шешімі келесі түрде анықталады

$$y(x) = e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha}d\xi} t^{-\alpha} f(t)dt. \qquad (1.2.21)$$

Ал түйіндес теңдеуді табу үшін $\langle x^\alpha y'(x) + \lambda(x)y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)}$ скаляр көбейтіндісін қарастырайық:

$$\begin{aligned}
&\langle x^\alpha y'(x) + \lambda(x)y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)} \\
&\quad = \langle x^\alpha y'(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)} + \langle \lambda(x)y(x), v(x)\rangle_{L_2(0,1)} \\
&\quad = \langle y'(x), x^\alpha v(x)\rangle_{L_2(0,1)} + \langle y(x), \lambda(x)v(x)\rangle_{L_2(0,1)} \\
&\quad = x^\alpha v(x)y(x)|_0^1 - \langle y(x), (x^\alpha v(x))'\rangle_{L_2(0,1)} + \langle y(x), \lambda(x)v(x)\rangle_{L_2(0,1)} \\
&\quad = x^\alpha v(x)y(x)|_0^1 + \langle y(x), -\left(x^\alpha v(x)\right)' + \lambda(x)v(x)\rangle_{L_2(0,1)};
\end{aligned}$$

Егер $v(1) = 0$ болса түйіндес теңдеу келесі түрде болатынын анықтаймыз

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(x^\alpha v(x)\right) + \lambda(x)v(x) = \mathrm{g}(x), \\ v(1) = 0. \end{cases} \qquad (1.2.22)$$

Алдымен біртекті теңдеуінің шешімін табайық:

$$-x^\alpha v'(x) + (\lambda(x) - \alpha x^{\alpha-1})v(x) = 0;$$
$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{\lambda(x) - \alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha};$$

бұл теңдіктің екі жағын да 1-ден x −аралығында интегралдасақ

$$\int_1^x \frac{v'(t)}{v(t)}dt = \int_1^x \frac{\lambda(t) - \alpha t^{\alpha-1}}{t^\alpha}dt$$

демек шешім келесі түрге ие

$$v_0(x) = qx^{-\alpha} e^{\int_1^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt}. \tag{1.2.23}$$

Осы тараудағы алдыңғы бөлімдеріндегідей (1.2.17) теңдеуінің жалпы шешімін тұрақты c санының f −ке және түйіндес біртекті есептің шешіміне қатысты қатынасын ескере отырып келесі түрде анықтаймыз

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} t^{-\alpha} f(t) dt + c e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \\ &= e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} t^{-\alpha} f(t) dt \\ &+ e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^1 q t^{-\alpha} e^{\int_1^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} f(t) dt. \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

Жалпы шекаралық шартты табайық, ол үшін жоғарыдағы интегралдың ішіндегі $f(t)$ функциясының орнына $x^\alpha y'(t) + \lambda(t) y(t)$ өрнегін қойып, бөліктеп интегралдау әдісін қолданып интегралды есептейік

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} t^{-\alpha} f(t) dt + e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^1 q t^{-\alpha} e^{\int_1^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} f(t) dt \\ &= e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} t^{-\alpha} \big(t^\alpha y'(t) + \lambda(t) y(t)\big) dt \\ &+ e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^1 q t^{-\alpha} e^{\int_1^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} \big(t^\alpha y'(t) + \lambda(t) y(t)\big) dt \\ = e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} &\left(y(x) e^{\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} - y(0) \right) - e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} t^{-\alpha} \lambda(t) y(t) dt \\ &+ e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \int_0^x e^{\int_0^t \frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi} t^{-\alpha} \lambda(t) y(t) dt \\ &+ q e^{-\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \left(y(1) - y(0) e^{\int_1^0 \frac{\lambda(t)}{t^\alpha} dt} \right) \end{aligned}$$

$$-qe^{-\int_0^x\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\int_0^1 e^{\int_1^t\frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha}d\xi}t^{-\alpha}\lambda(t)y(t)dt$$

$$+qe^{-\int_0^x\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\int_0^1 e^{\int_1^t\frac{\lambda(\xi)}{\xi^\alpha}d\xi}t^{-\alpha}\lambda(t)y(t)dt$$

$$=y(x)-e^{-\int_0^x\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}y(0)+qe^{-\int_0^x\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\left(y(1)+y(0)e^{\int_0^1\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\right),$$

бұдан

$$-e^{-\int_0^x\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}y(0)+qe^{-\int_0^x\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\left(y(1)+y(0)e^{\int_0^1\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\right)=0$$

екені шығады. Сызықты тәуелсіз мүшелерінің алдындағы коэффиценттерін нөлге теңестірсек

$$\left(1-qe^{\int_0^1\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}dt}\right)y(0)=qy(1) \qquad (1.2.25)$$

шарттарын табымыз. Бұл шарт (1.2.17) теңдеуінің жалпы шекаралық шарты болып табылады.

1.1.3 - Теорема $0\le\alpha<\frac{1}{2}$ болсын. Онда кез келген $\lambda\in C[0,1]$, $f\in L_2(0,1)$ және әрбір $q\in\mathbb{R}$ үшін (1.2.17) теңдеуінің (1.2.25) өрнегімен берілген жалпы түрдегі шекаралық шартын қанағаттандыратын $y\in W^1_{2,\,x^\alpha}(0,1)$ шешімі үшін келесі теңсіздікті орынды

$$\|y\|_{W^1_{2,\,x^\alpha}(0,1)}=\left\|x^\alpha\frac{d}{dx}y\right\|_{L_2(0,1)}+\|y\|_{L_2(0,1)}\le \mathrm{c}\|f\|_{L_2(0,1)},\ \ c=const<\infty.$$

Дәлелдеуі. (1.2.17) теңдеуінің шешімі (1.2.25) шартын қанағаттандыратыны айқын. Ал 1.1.2 - леммасының дәлелі (1.2.17) теңдеуінің шешімінің $\|y\|_{W^1_{2,\,x^\alpha}(0,1)}$ нормасын бағалауға да дәлел болатыны айқын.

2 ЕКІНШІ РЕТТІ АЗҒЫНДАЛҒАН ҚАРАПАЙЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН РЕГУЛЯРЛЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

2.1 Бір өлшемді екінші ретті азғындалған қарапайым дифференциалдық теңдеулердің бір мысалы

Бұл бөлімде екінші ретті азғындалған дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы шекаралық шартын құратын боламыз. Қарапайым әрі түсінікті болу үшін алдымен шешімі қарапайым функциялар арқылы өрнектелетін келесі теңдеуді қарастырайық.

Төменде берілген теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$xy''(x) + \frac{1}{2}y'(x) + ay(x) = f(x),\ \ a > 0,\ \ x \in (0,1) \qquad (2.1.1)$$

Алдымен (2.1.1) теңдеуінің біртекті жағдайы үшін жалпы шешімін табайық

$$xy''(x) + \frac{1}{2}y'(x) + ay(x) = 0,\ \ a > 0. \qquad (2.1.2)$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімін келесі түрде іздейміз [53, 386 б.]:

$$y(x) = C_1 \cos 2\sqrt{ax} + C_2 \sin 2\sqrt{ax}. \qquad (2.1.3)$$

мұнда $C_1, C_2 - const$. Енді C_1, C_2 −тұрақтыларын вариациялау әдісі арқылы оларды $C_1(x), C_2(x)$ белгісіз функциялармен алмастырып, теңдеудегі орнынына қояйық. Онда (2.1.1) теңдеуінің жалпы шешімін келесі түрде жаза аламыз:

$$y(x) = C_1(x) \cos 2\sqrt{ax} + C_2(x) \sin 2\sqrt{ax}. \qquad (2.1.4)$$

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер курсынан белгілі әдісті ескере отырып, төмендегі теңдеулер жүйесін шешейік

$$\begin{cases} C'_1(x) \cos 2\sqrt{ax} + C'_2(x) \sin 2\sqrt{ax} = 0, \\ -C'_1(x) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \sin 2\sqrt{ax} + C'_2(x) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \cos 2\sqrt{ax} = \frac{f(x)}{x}. \end{cases} \qquad (2.1.5)$$

(2.1.5) теңдеулер жүйесін шешу үшін Крамер әдісін ескере отырып келесі анықтауыштарды есептейік:

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2\sqrt{ax} & \sin 2\sqrt{ax} \\ -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \sin 2\sqrt{ax} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \cos 2\sqrt{ax} \end{vmatrix} \qquad (2.1.6)$$

$$W=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\cos^2 2\sqrt{ax}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\sin^2 2\sqrt{ax}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin 2\sqrt{ax}\\ \frac{f(x)}{x} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\cos 2\sqrt{ax}\end{vmatrix}=-\frac{f(x)}{x}\sin 2\sqrt{ax}.$$

$$W_2=\begin{vmatrix}\cos 2\sqrt{ax} & 0\\ -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\sin 2\sqrt{ax} & \frac{f(x)}{x}\end{vmatrix}=\frac{f(x)}{x}\cos 2\sqrt{ax}.$$

Онда

$$\begin{aligned}C'_1(x) &= \frac{W_1}{W}=-\frac{f(x)\sin 2\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}},\\ C'_2(x) &= \frac{W_2}{W}=\frac{f(x)\cos 2\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}}.\end{aligned}$$

Сәйкесінше,

$$\begin{aligned}C_1(x) &= -\int_0^x \frac{f(t)\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{at}}dt+c_1,\\ C_2(x) &= \int_0^x \frac{f(t)\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{at}}dt+c_2.\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Демек (2.1.1) теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде болады:

$$\begin{aligned}y(x) &= -\cos 2\sqrt{ax}\int_0^x \frac{f(t)\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{at}}dt+\sin 2\sqrt{ax}\int_0^x \frac{f(t)\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{at}}dt\\ &+c_1\cos 2\sqrt{ax}+c_2\sin 2\sqrt{ax}=\end{aligned}$$

$$=\int_0^x f(t)\frac{\sin 2\sqrt{ax}\cos 2\sqrt{at}-\cos 2\sqrt{ax}\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{at}}dt+c_1\cos 2\sqrt{ax}+c_2\sin 2\sqrt{ax}$$

$$=\int_0^x f(t)\frac{\sin 2\sqrt{a}\left(\sqrt{x}-\sqrt{t}\right)}{\sqrt{at}}dt+c_1\cos 2\sqrt{ax}+c_2\sin 2\sqrt{ax}. \tag{2.1.8}$$

Коши есебінің қойылуы: $x\in(0,1)$, (2.1.1) теңдеуі үшін

$$y(0)=0,\sqrt{x}y'(x)\big|_{x=0}=0$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешім келесі түрге ие

$$y(x)=\int_0^x f(t)\frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{at}}dt. \tag{2.1.9}$$

мұнда тұрақты $c_1, c_2 -$ сандары 1-тарауда көрсетілгендей f-ке тәуелді функционал және ол қойылған есепке түйіндес есептің біртекті жағдайындағы шешімі арқылы өрнектеледі. Сол үшін енді (2.1.1)-ге түйіндес есептің біртекті жағдайы үшін дербес шешімдерін табайық. Түйіндес теңдеуді табу үшін келесі скаляр көбейтіндіні есептейік:

$$\begin{aligned}
\langle xy'' + \tfrac{1}{2}y' + ay, v\rangle &= \int_0^1 \left[xy''(x) + \tfrac{1}{2}y'(x) + ay(x)\right] v(x)dx \\
&= \int_0^1 xy''(x)v(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 y'(x)v(x)dx + a\int_0^1 y(x)v(x)dx \\
&= xv(x)y'(x)|_0^1 - (xv(x))'y(x)|_0^1 + \int_0^1 y(x)(xv(x))''dx \\
&+\tfrac{1}{2}y(x)v(x)|_0^1 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 y(x)v'(x)dx + a\int_0^1 y(x)v(x)dx \\
&= xv(x)y'(x)|_0^1 - (xv(x))'y(x)|_0^1 + \tfrac{1}{2}y(x)v(x)|_0^1 + \\
&+\int_0^1 y(x)\left[\left(xv(x)\right)'' - \tfrac{1}{2}v'(x) + av(x)\right]dx,
\end{aligned}$$

онда

$$\begin{aligned}
\langle xy'' + \tfrac{1}{2}y' + ay, v\rangle = \ & \langle y, xv''(x) + \tfrac{3}{2}v'(x) + av(x)\rangle \\
& + xv(x)y'(x)|_0^1 - (xv(x))'y(x)|_0^1 + \tfrac{1}{2}y(x)v(x)|_0^1
\end{aligned}$$

теңдігін аламыз, енді Коши есебінің $y(0) = 0$ және $\sqrt{x}y'(x)\big|_{x=0} = 0$ бастапқы шарттарын ескере отырып түйіндес есептің шекаралық шартын табайық, яғни

$$\langle xy'' + \tfrac{1}{2}y' + ay, v\rangle = \langle y, xv''(x) + \tfrac{3}{2}v'(x) + av(x)\rangle,$$

Ал

$$\begin{aligned}
0 = \ & xv(x)y'(x)|_0^1 - (xv(x))'y(x)|_0^1 + \tfrac{1}{2}y(x)v(x)|_0^1 \\
= \ & y'(1)v(1) - y(1)(v(1) + v'(1)) + \tfrac{1}{2}y(1)v(1) - \tfrac{1}{2}y(0)v(0) \\
= \ & y'(1)v(1) - y(1)\left[\tfrac{1}{2}v(1) + v'(1)\right],
\end{aligned}$$

онда $v(1) = 0, v'(1) = 0$. Яғни,

$$\begin{cases} xy''(x) + \frac{1}{2}y'(x) + ay(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \ \sqrt{x}y'(x)\big|_{x=0} = 0, \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Коши есебіне түйіндес есеп келесі түрде болады

$$\begin{cases} xv''(x) + \frac{3}{2}v'(x) + av(x) = g(x), \\ v(1) = 0, \ v'(1) = 0. \end{cases} \qquad (2.1.11)$$

Ал бұл есептің біртекті теңдеуі

$$xv''(x) + \frac{3}{2}v'(x) + av(x) = 0,$$

оның жалпы шешімі

$$v(x) = -q_1 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \sin 2\sqrt{ax} + q_2 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \cos 2\sqrt{ax}, \qquad (2.1.12)$$

мұнда $q_1, q_2 - const.$

Енді (2.1.8) теңдікке оралайық.

$$y(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{at}} dt + c_1 \cos 2\sqrt{ax} + c_2 \sin 2\sqrt{ax} \qquad (2.1.13)$$

(2.1.1) теңдеуі үшін жалпы шекаралық шартты табайық, онда осы жалпы түрдегі шекаралық шартты қанағаттандыратын жалғыз шешімді іздеп отырғандықтан c_1, c_2 тұрақтылары f −ке сызықты үзіліссіз тәуелді, демек

$$c_1 = c_1(f), \ \ c_2 = c_2(f)$$

f −ке сызықты үзіліссіз тәуелді функционалдар, онда Рисс теоремасы бойынша

$$c_1 = \int_0^1 \sigma_1(x) f(x) dx, \ \ c_2 = \int_0^1 \sigma_2(x) f(x) dx.$$

М. Өтелбаевтың теоремасы бойынша σ_1, σ_2 жұбы (2.1.11) операторының өзегінде жатыр. Демек

$$c_1 = -q_1 \int_0^1 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \sin 2\sqrt{ax} f(x) dx, \ \ c_2 = q_2 \int_0^1 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \cos 2\sqrt{ax} f(x) dx$$

онда жалпы шешім келесі түрге ие

$$\begin{aligned} y(x) = & \int_0^x f(t) \frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{at}} dt - \\ & -q_1 \cos 2\sqrt{ax} \int_0^1 f(t) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}} \sin 2\sqrt{at} dt + q_2 \sin 2\sqrt{ax} \int_0^1 f(t) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}} \cos 2\sqrt{at} dt. \end{aligned} \qquad (2.1.14)$$

Ыңғайлылық үшін келесі белгілеулерді енгізейік

$$Y_0(x,t) := \frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{at}},$$
$$V_1(t) := -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\sin 2\sqrt{at},$$
$$V_2(t) := \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\cos 2\sqrt{at}.$$

онда

$$y(x) = \int_0^x f(t)Y_0(x,t)dt +$$
$$+q_1\cos 2\sqrt{ax}\int_0^1 f(t)V_1(t)dt + q_2\sin 2\sqrt{ax}\int_0^1 f(t)V_2(t)dt. \tag{2.1.15}$$

1. Алдымен бірінші интегралды есептеп алайық:

$$\int_0^x f(t)Y_0(x,t)dt = \int_0^x \left(ty''(t) + \frac{1}{2}y'(t) + ay(t)\right)Y_0(x,t)dt$$
$$= \int_0^x ty''(t)Y_0(x,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x y'(t)Y_0(x,t)dt + a\int_0^x y(t)Y_0(x,t)dt$$
$$= y'(t)tY_0(x,t)|_0^x - y(t)\frac{d}{dt}\big(tY_0(x,t)\big)|_0^x + \int_0^x y(t)\frac{d^2}{dt^2}\big(tY_0(x,t)\big)dt$$
$$+\frac{1}{2}y(t)Y_0(x,t)|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x y(t)\frac{d}{dt}Y_0(x,t)dt + a\int_0^x y(t)Y_0(x,t)dt$$
$$= y'(t)tY_0(x,t)|_0^x - y(t)\frac{d}{dt}(tY_0(x,t))|_0^x + \frac{1}{2}y(t)Y_0(x,t)|_0^x$$
$$+\int_0^x y(t)\left[\frac{d^2}{dt^2}(tY_0(x,t)) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}Y_0(x,t) + aY_0(x,t)\right]dt. \tag{2.1.16}$$

Біртекті теңдеудің шешімі үшін келесі теңдік орынды

$$\frac{d^2}{dt^2}(tY_0(x,t)) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}Y_0(x,t) + aY_0(x,t)$$
$$= t\frac{d^2}{dt^2}Y_0(x,t) + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}Y_0(x,t) + aY_0(x,t) = 0.$$

Онда

$$\int_0^x f(t)Y_0(x,t)dt = y'(t)tY_0(x,t)|_0^x - y(t)\frac{d}{dt}(tY_0(x,t))|_0^x + \frac{1}{2}y(t)Y_0(x,t)|_0^x \tag{2.1.17}$$

2. Енді екінші интегралды есептейік

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)V_1(t)dt \quad &= \int_0^1 \left(ty''(t) + \frac{1}{2}y'(t) + ay(t)\right)V_1(t)dt \\
&= \int_0^1 ty''(t)V_1(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 y'(t)V_1(t)dt + a\int_0^1 y(t)V_1(t)dt \\
&= y'(t)tV_1(t)|_0^1 - y(t)\frac{d}{dt}(tV_1(t))|_0^1 + \int_0^1 y(t)\frac{d^2}{dt^2}(tV_1(t))dt \\
&+ \frac{1}{2}y(t)V_1(t)|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)V'_1(t)dt + a\int_0^1 y(t)V_1(t)dt \\
&= y'(t)tV_1(t)|_0^1 - y(t)\frac{d}{dt}(tV_1(t))|_0^1 + \frac{1}{2}y(t)V_1(t)|_0^1 + \\
&+ \int_0^1 y(t)\left[\frac{d^2}{dt^2}(tV_1(t)) - \frac{1}{2}V'_1(t) + aV_1(t)\right]dt \\
&= y'(t)tV_1(t)|_0^1 - y(t)\frac{d}{dt}(tV_1(t))|_0^1 + \frac{1}{2}y(t)V_1(t)|_0^1.
\end{aligned}$$

3. Жоғарыдағы 2) есептеулердегідей соңғы интегралды есептесек келесі теңдікті аламыз

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)V_2(t)dt \quad &= \int_0^1 \left(ty''(t) + \frac{1}{2}y'(t) + ay(t)\right)V_2(t)dt \\
&= y'(t)tV_2(t)|_0^1 - y(t)\frac{d}{dt}(tV_2(t))|_0^1 + \frac{1}{2}y(t)V_2(t)|_0^1
\end{aligned}$$

Ендеше 1), 2) және 3) есептеулерінің нәтижесін біріктіре отырып келесі теңдік орынды екеніне көз жеткіземіз:

$$\begin{aligned}
y(x) \quad &= \int_1^x f(t)Y_0(x,t)dt + \\
&+ q_1\cos2\sqrt{ax}\int_0^1 f(t)V_1(t)dt + q_2\sin2\sqrt{ax}\int_0^1 f(t)V_2(t)dt \\
&= y'(t)tY_0(x,t)|_0^x - y(t)\frac{d}{dt}(tY_0(x,t))|_0^x + \frac{1}{2}y(t)Y_0(x,t)|_0^x + \\
&+ q_1\cos2\sqrt{ax}\left[y'(t)tV_1(t)|_0^1 - y(t)\frac{d}{dt}(tV_1(t))|_0^1 + \frac{1}{2}y(t)V_1(t)|_0^1\right] \\
&+ q_2\sin2\sqrt{ax}\left[y'(t)tV_2(t)|_0^1 - y(t)\frac{d}{dt}(tV_2(t))|_0^1 + \frac{1}{2}y(t)V_2(t)|_0^1\right].
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Қарапайым есептеулерден төменгі теңдіктердің дұрыстығын көре аламыз

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(tY_0(x,t)) &= \frac{d}{dt}\frac{t\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{at}} \\
&= \frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})-2\sqrt{at}\cos 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{2\sqrt{at}}; \\
\frac{d}{dt}(tV_1(t)) &= -\frac{d}{dt}\frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\sin 2\sqrt{at} = -\frac{\sqrt{a}\sin 2\sqrt{at}}{2\sqrt{t}} - a\cos 2\sqrt{at}; \\
\frac{d}{dt}(tV_2(t)) &= \frac{d}{dt}\frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\cos 2\sqrt{at} = \frac{\sqrt{a}\cos 2\sqrt{at}}{2\sqrt{t}} - a\sin 2\sqrt{at}.
\end{aligned}
$$

Енді $Y_0(x,x) = 0$ екенін ескере отырып (2.1.18) өрнегін есептейік:

$$
\begin{aligned}
y(x) = \;& y'(t)tY_0(x,t)|_0^x - y(t)\frac{d}{dt}(tY_0(x,t))|_0^x + \frac{1}{2}y(t)Y_0(x,t)|_0^x + \\
&+q_1\cos 2\sqrt{ax}\left[y'(t)tV_1(t) - y(t)\frac{d}{dt}(tV_1(t)) + \frac{1}{2}y(t)V_1(t)\right]_0^1 \\
&+q_2\sin 2\sqrt{ax}\left[y'(t)tV_2(t) - y(t)\frac{d}{dt}(tV_2(t)) + \frac{1}{2}y(t)V_2(t)\right]_0^1 \quad (2.1.19) \\
= \;& y'(t)tY_0(x,t)|_0^x - \left(y(t)\frac{d}{dt}(tY_0(x,t)) - \frac{1}{2}y(t)Y_0(x,t)\right)|_0^x + \\
&+q_1\cos 2\sqrt{ax}[A]_0^1 + q_2\sin 2\sqrt{ax}[B]_0^1.
\end{aligned}
$$

Мұндағы A және B белгілеулерінің түрі төменде беріледі. Қолайлылық үшін мұндағы қосылғыштарды бөлек есептеп, артынан біріктіреміз:

$$
\begin{aligned}
y'(t)tY_0(x,t)|_0^x &= \sqrt{t}y'(t)\sqrt{t}Y_0(x,t)\Big|_0^x = \sqrt{t}y'(t)\sqrt{t}\frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{at}}\Bigg|_0^x \\
&= \sqrt{t}y'(t)\frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{a}}\Bigg|_0^x = -\sqrt{t}y'(t)\Big|_{t=0}\frac{\sin 2\sqrt{ax}}{\sqrt{a}},
\end{aligned}
$$

және

$$
\begin{aligned}
\left(y(t)\frac{d}{dt}(tY_0(x,t)) - \frac{1}{2}y(t)Y_0(x,t)\right)\Bigg|_0^x &= y(t)\left(\frac{d}{dt}(tY_0(x,t)) - \frac{1}{2}Y_0(x,t)\right)\Bigg|_0^x \\
&= y(t)\Bigg(\frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t}) - 2\sqrt{at}\cos 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{2\sqrt{at}} \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\sin 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{at}}\Bigg)\Bigg|_0^x = y(t)\left(\frac{-2\sqrt{at}\cos 2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{2\sqrt{at}}\right)\Bigg|_0^x \\
&= y(t) + y(0)\cos 2\sqrt{xa}.
\end{aligned}
$$

(2.1.19) өрнектің күрделілігіне байланысты төмендегі уақытша белгілеулерді енгіздік

$$A = y'(t)tV_1(t) - y(t)\frac{d}{dt}(tV_1(t)) + \frac{1}{2}y(t)V_1(t)$$
$$= -y'(t)t\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\sin 2\sqrt{at} + y(t)\frac{\sqrt{a}\sin 2\sqrt{at}}{2\sqrt{t}} + ay(t)\cos 2\sqrt{at}$$
$$-\frac{1}{2}y(t)\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\sin 2\sqrt{at} = -y'(t)\sqrt{at}\sin 2\sqrt{at} + ay(t)\cos 2\sqrt{at};$$

$$\text{B} = y'(t)tV_2(t) - y(t)\frac{d}{dt}(tV_2(t)) + \frac{1}{2}y(t)V_2(t)$$
$$= y'(t)t\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\cos 2\sqrt{at} - y(t)\frac{\sqrt{a}\cos 2\sqrt{at}}{2\sqrt{t}} + ay(t)\sin 2\sqrt{at}$$
$$+\frac{1}{2}y(t)\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\cos 2\sqrt{at} = y'(t)\sqrt{at}\cos 2\sqrt{at} + ay(t)\sin 2\sqrt{at};$$

$$V_2(t) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}}\cos 2\sqrt{at}, \quad \frac{d}{dt}(tV_2(t)) = \frac{\sqrt{a}\cos 2\sqrt{at}}{2\sqrt{t}} - a\sin 2\sqrt{at},$$

және олардың шекарадағы $[A]|_0^1$, $[B]|_0^1$ мәндерін келесідей есептейміз

$$[A]|_0^1 = -y'(1)\sqrt{a}\sin 2\sqrt{a} + ay(1)\cos 2\sqrt{a} - ay(0);$$

$$[B]|_0^1 = y'(1)\sqrt{a}\cos 2\sqrt{a} + ay(1)\sin 2\sqrt{a}. \tag{2.1.20}$$

Жоғарадағы есептеулерден кейін (2.1.19) теңдігін келесі түде жаза аламыз

$$y(x) = y(x) - \sqrt{t}y'(t)\Big|_{t=0}\frac{\sin 2\sqrt{ax}}{\sqrt{a}} - y(0)\cos 2\sqrt{xa}$$
$$+ q_1\cos 2\sqrt{ax}\left[-y'(1)\sqrt{a}\sin 2\sqrt{a} + ay(1)\cos 2\sqrt{a} - ay(0)\right]$$
$$+ q_2\sin 2\sqrt{ax}\left[y'(1)\sqrt{a}\cos 2\sqrt{a} + ay(1)\sin 2\sqrt{a}\right]. \tag{2.1.21}$$

Теңдіктің екі жағындағы $y(x)$ функциясын жою арқылы келесі тепе-теңдікті аламыз

$$0 = -\sqrt{t}y'(t)\Big|_{t=0}\frac{\sin 2\sqrt{ax}}{\sqrt{a}} - y(0)\cos 2\sqrt{xa} + q_1\cos 2\sqrt{ax}\left[-y'(1)\sqrt{a}\sin 2\sqrt{a} + ay(1)\cos 2\sqrt{a} - ay(0)\right] + q_2\sin 2\sqrt{ax}\left[y'(1)\sqrt{a}\cos 2\sqrt{a} + ay(1)\sin 2\sqrt{a}\right] =$$
$$\cos 2\sqrt{ax}\left[-y(0) + q_1\left(-y'(1)\sqrt{a}\sin 2\sqrt{a} + ay(1)\cos 2\sqrt{a} - ay(0)\right)\right] +$$
$$\sin 2\sqrt{ax}\left[-\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t}y'(t)\Big|_{t=0} + q_2\left(y'(1)\sqrt{a}\cos 2\sqrt{a} + ay(1)\sin 2\sqrt{a}\right)\right],$$

ал $\{\cos 2\sqrt{ax}\}$ және $\{\sin 2\sqrt{ax}\}$ сызықты тәуелсіз болғандықтан теңдік нөлге айналу үшін олардың алдындағы коэффиценттері нөл болу керек, демек (2.1.1) теңдеуі үшін жалпы түрдегі шекаралық шарт келесі түрде болады

$$-y(0) + q_1\left(-y'(1)\sqrt{a}\sin 2\sqrt{a} + ay(1)\cos 2\sqrt{a} - ay(0)\right) = 0;$$

$$-\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t}y'(t)\Big|_{t=0} + q_2\left(y'(1)\sqrt{a}\cos 2\sqrt{a} + ay(1)\sin 2\sqrt{a}\right) = 0.$$

Еркін q_1, q_2 тұрақтылары нөлге тең болса дербес жағдайында Коши есебін алатынымызды байқау қиын емес. Ал бұл шекаралық шартты матрицалық түрде жазсақ

$$\begin{pmatrix} -1 - aq_1 & aq_1\cos 2\sqrt{a} & 0 & -\sqrt{a}q_1\sin 2\sqrt{a} \\ 0 & a\sqrt{a}q_2\sin 2\sqrt{a} & -1 & aq_2\cos 2\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \sqrt{t}y'(t)\Big|_{t=0} \\ y'(1) \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.1.22)$$

Бұл нәтижелерді қорытындылай келе келесі Лемма орынды екеніне көзіміз жетті:

2.1.1 - Лемма Кез келген $f \in L_2(0,1)$ және әрбір $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ үшін (2.1.1) теңдеуінің (2.1.22) шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар.

2.2 Бір өлшемді екінші ретті әлсіз азғындалған дифференциалдық теңдеудің жалпы регулярлы шекаралық шарты

Төмендегі екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін тап, $0 \le \beta < 1$ және $0 < a$ болсын

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}y(x)\right) + ay(x) = f(x), \;\; x \in (0,1). \qquad (2.2.1)$$

Бұл теңдеудің шешімін табу үшін Лагранж әдісін қолданайық, ол үшін алдымен біртекті теңдеудің шешімін табайық

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}y(x)\right) + ay(x) = 0, \;\; a > 0, \qquad (2.2.2)$$

бұл біртекті теңдеудің шешімін келесі түрде іздейміз [53].

$$y(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}}\left[C_1 J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + C_2 Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right],$$

мұнда $C_1, C_2 - const$, $\nu = \frac{1-\beta}{2-\beta}$, ал $J_\nu(x)$ және $Y_\nu(x)$ сәйкесінше бірінші және екінше текті Бессел функциясы.

Енді C_1, C_2 –тұрақтыларын вариациялау әдісі арқылы оларды $C_1(x), C_2(x)$ белгісіз функциялармен алмастырып, теңдеудегі орнынына қояйық. Онда (2.2.1) теңдеуінің жалпы шешімі:

$$y(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}}\left[C_1(x)J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + C_2(x)Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right],$$

Ал мұндағы $C_1(x), C_2(x) -$ белгісіз функцияларын табу үшін төмендегі теңдеулер жүйесін шешейік

$$\begin{cases} C'_1(x)x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + C'_2(x)x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) = 0, \\ C'_1(x)\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) + C'_2(x)\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) = \frac{f(x)}{x^\beta}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Бұл теңдеулер жүйесінің Вронский анықтауышын есептейік

$$\begin{aligned} W = {} & x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) \\ & - x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) \\ = {} & x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1-\beta}{2}}\right]\cdot Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\ & \cdot\left[x^{\frac{1-\beta}{2}}\right]\cdot\frac{d}{dx}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) - x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1-\beta}{2}}\right] \\ & \cdot J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) - x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\left[x^{\frac{1-\beta}{2}}\right] \\ & \cdot\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\ = {} & x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\left[x^{\frac{1-\beta}{2}}\right]\cdot\frac{d}{dx}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) - x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\ & \cdot\left[x^{\frac{1-\beta}{2}}\right]\cdot\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$= x^{1-\beta}\left[J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) - Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right] \quad (2.2.4)$$

Бессел функциясына қатысты туындыларды есептеу үшін келесідей алмастыру енгізейік: $\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} := b$; $x^{\frac{2-\beta}{2}} := t$; онда $x^{\frac{1-\beta}{2}} = t^{\nu}$, мұндағы $\nu = \frac{1-\beta}{2-\beta}$. Онда келесі теңдік орынды екенін қарапайым есептеулерден аламыз

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) = \frac{2-\beta}{2}t^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\frac{d}{dt}\left(t^{\nu}J_\nu(bt)\right) = \frac{2-\beta}{2}t^{-\frac{\beta}{2-\beta}}bt^{\nu}J_{\nu-1}(bt) =$$
$$\frac{2-\beta}{2}x^{-\frac{\beta}{2}}\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) = \sqrt{a}x^{\frac{1-2\beta}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \quad (2.2.5)$$

Дәл сол сияқты екінші текті Бессел функциясы үшін де келесі теідікті аламыз

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) = \sqrt{a}x^{\frac{1-2\beta}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right). \quad (2.2.6)$$

Демек, (2.2.4) Вронский анықтауышын келесі түрде қайта жазып алуға болады

$$\begin{aligned} W = x^{1-\beta}&\left[J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) - Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right.\\ &\left.\cdot\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\\ &= x^{1-\beta}\left[J_\nu(bt)\cdot\frac{2-\beta}{2}t^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\frac{d}{dt}Y_\nu(bt) - Y_\nu(bt)\right.\\ &\left.\cdot\frac{2-\beta}{2}t^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\frac{d}{dt}J_\nu(bt)\right]\\ &= x^{1-\beta}\frac{2-\beta}{2}t^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\left[J_\nu(bt)\cdot\frac{d}{dt}Y_\nu(bt) - Y_\nu(bt)\cdot\frac{d}{dt}J_\nu(bt)\right]\end{aligned}$$

Онда белгілі $W\{J_\nu(z), Y_\nu(z)\} = J_\nu(z)Y'_\nu(z) - J'_\nu(z)Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}$ теңдігін [54] ескере отырып Вронский анықтауышы келесі түрге ие екенін аламыз

$$\begin{aligned} W = x^{1-\beta}\frac{2-\beta}{2}bt^{-\frac{\beta}{2-\beta}}W\{J_\nu(bt), Y_\nu(bt)\} &= x^{1-\beta}\frac{2-\beta}{2}t^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\cdot\frac{2}{\pi t}\\ &= x^{1-\beta}\frac{2-\beta}{2}\left(x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\cdot\frac{2}{\pi x^{\frac{2-\beta}{2}}} = \frac{2-\beta}{\pi}x^{1-\beta-\frac{2-\beta}{2}\cdot\frac{\beta}{2-\beta}-\frac{2-\beta}{2}}\\ &= \frac{2-\beta}{\pi}x^{-\beta};\end{aligned}$$

(2.2.7)

Ал

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\\ \frac{f(x)}{x^\beta} & \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)\end{vmatrix}=-x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot\frac{f(x)}{x^\beta}$$

$$=-x^{\frac{1-3\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot f(x);$$

және

$$W_2=\begin{vmatrix}x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) & 0\\ \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) & \frac{f(x)}{x^\beta}\end{vmatrix}=x^{\frac{1-3\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot f(x);$$

Белгісіз $C_1(x), C_2(x)$ функциялары үшін сәйкесінше келесі теңдеулерді аламыз

$$C'_1(x)=\frac{W_1}{W}=-\frac{x^{\frac{1-3\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot f(x)}{\frac{2-\beta}{\pi}x^{-\beta}.}$$

$$=-\frac{\pi}{2-\beta}\ x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot f(x);$$

және

$$C'_2(x)=\frac{W_2}{W}=\frac{\pi}{2-\beta}\ x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\cdot f(x).$$

Енді жоғарыдағы теңдіктің екі жағын да 0 мен x аралығында интегралдасақ ізделінді функцияларын табамыз

$$C_1(x)=-\frac{\pi}{2-\beta}\int_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt+c_1; \qquad (2.2.8)$$

$$C_2(x)=\frac{\pi}{2-\beta}\int_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt+c_2, \qquad (2.2.9)$$

мұнда $c_1,\ c_2$ —тұрақты сандар.

Онда (2.2.1) теңдеуінің жалпы шешімі:

$$y(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}}\Bigg[-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$+Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$+c_1J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)+c_2Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\Bigg]. \tag{2.2.10}$$

Бессел функциясының дәрежелік қатарға жіктелуі оң ν саны үшін келемі өрнек түрінде болатыны белгілі [55]

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

ал теріс индексі үшін

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}.$$

Онда $0 < \nu = \frac{1-\beta}{2-\beta} < 1$ саны үшін $J_\nu(z)$ және $Y_\nu(z)$ стандартты Бессел функцияларының $z \longrightarrow 0$ кезіндегі ассимптотикалары белгілі

$$J_\nu(z) \sim \frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$$

мұнда $\nu \neq \pm1, \pm2, \ldots$

$$J_{-\nu}(z) \sim \frac{2^\nu}{z^\nu\Gamma(1-\nu)}. \tag{2.2.11}$$

Біздің жағдайда $\nu - 1 < 0$, онда

$$J_{\nu-1}(z) \sim \frac{2^{1-\nu}}{z^{1-\nu}\Gamma(\nu)},$$

Ал екінші текті Бессел функциясы бірінші текті Бессел функциясымен өрнектеледі:

$$Y_\nu(z)=\frac{cos(\nu\pi)}{sin(\nu\pi)}J_\nu(z)-\frac{1}{sin(\nu\pi)}J_{-\nu}(z)$$

Демек оның асимтотикалары

$$\begin{cases} Y_\nu(z)\sim-\frac{1}{sin(\nu\pi)}J_{-\nu}(z), & \text{егер } \nu>0; \\ Y_\nu(z)\sim\frac{cos(\nu\pi)}{sin(\nu\pi)}J_\nu(z), & \text{егер } \nu<0. \end{cases} \tag{2.2.11*}$$

Коши есебінің қойылуы: (2.2.1) теңдеуінің

$$y(x)=x^{\frac{1-\beta}{2}}\left[\frac{\pi}{2-\beta}\int_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}\left[J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]dt\right] \tag{2.2.12}$$

шешімі келесі бастапқы шарттарды қанағаттандырады

$$y(x)|_{x=0}=0,\ \ x^\beta y'(x)\big|_{x=0}=0. \tag{2.2.13}$$

(2.2.13) түріндегі бастапқы шарт –түрлендірілген бастапқы шарт деп аталады. (2.2.12) шешім үшін (2.2.13) шартының орындалатынын тексерейік.

Бессел функцияларының $z\longrightarrow 0$ кезіндегі ассимптотикаларын ескере отырып $y(x)|_{x=0}=0,\ \ x^\beta y'(x)\big|_{x=0}=0$ шарттарын тексеру қиын емес, дәлірек айтқында

$$\begin{aligned} y(x)|_{x=0}&=-x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\bigg|_{x=0}\frac{\pi}{2-\beta}\int_0^0 f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt \\ &+x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\bigg|_{x=0}\frac{\pi}{2-\beta}\int_0^0 f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt \\ &=0\cdot 0-\frac{1}{sin(\nu\pi)}\frac{2^\nu}{\Gamma(1-\nu)}\cdot 0=0; \end{aligned}$$

$x^\beta y'(x)\big|_{x=0}=0$ шартын тексеру үшін алдымен $\frac{d}{dx}y(x)$ туындысын есептеп алайық. Ол үшін (2.2.5)-(2.2.6) өрнектерді қолданатын боламыз.

$$\frac{d}{dx}y(x) = -\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$-x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt\right)$$

$$+\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$+x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt\right)=$$

$$=-\sqrt{a}x^{\frac{1-2\beta}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$-x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\left(\frac{\pi}{2-\beta}f(x)x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)$$

$$+\sqrt{a}x^{\frac{1-2\beta}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$+x^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\left(\frac{\pi}{2-\beta}f(x)x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)=$$

$$=-\sqrt{a}x^{\frac{1-2\beta}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$+\sqrt{a}x^{\frac{1-2\beta}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt; \tag{2.2.14}$$

онда

$$x^\beta y'(x)\Big|_{x=0} = -x^{\beta+\frac{1-2\beta}{2}}\Big|_{x=0}J_{\nu-1}(0)\cdot 0 - x^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=0}\frac{cos((\nu-1)\pi)}{sin((\nu-1)\pi)}\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)b^{1-\nu}}\cdot 0 = 0.$$

Енді (2.2.1) теңдеуінің (2.2.10) жалпы шешіміне оралайық. Тұрақты c_1, c_2 – сандары 1-тарауда көрсетілгендей f-ке тәуелді функционал және ол қойылған есепке түйіндес есептің біртекті жағдайындағы шешімі арқылы өрнектеледі. Сол үшін енді (2.1.3)-ге түйіндес есептің біртекті жағдайы үшін дербес шешімдерін табайық. Түйіндес теңдеуді табу үшін $y(x)|_{x=0} = 0,\ x^{\beta} y'(x)\big|_{x=0} = 0$ шарттарын ескеріп келесі скаляр көбейтіндіні есептейік:

$$
\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}y\right) + ay, v\rangle_{L_2(0,1)} &= \langle \frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}y\right), v\rangle_{L_2(0,1)} + \langle ay, v\rangle_{L_2(0,1)} \\
&= x^{\beta}y'(x)v(x)\big|_0^1 - \langle x^{\beta}y', v'\rangle_{L_2(0,1)} + \langle y, av\rangle_{L_2(0,1)} \\
&= x^{\beta}y'(x)v(x)\big|_0^1 - \langle y', x^{\beta}v'\rangle_{L_2(0,1)} + \langle y, av\rangle_{L_2(0,1)} \\
&= x^{\beta}y'(x)v(x)\big|_0^1 - y(x)x^{\beta}v'(x)\big|_0^1 + \langle y, \frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}v(x)\right)\rangle_{L_2(0,1)} \\
&+ \langle y, av\rangle_{L_2(0,1)} = \langle y, \frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}v(x)\right) + av\rangle_{L_2(0,1)};
\end{aligned}
$$

Демек, түйіндес есеп келесі түрде болады

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}v(x)\right) + av(x) = g(x); \\
v(1) = 0,\ \ v'(1) = 0.
\end{cases}
$$

Келесі біртекті теңдеудің шешімін табайық

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d}{dx}v(x)\right) + av(x) = 0.$$

Ал бұл біртекті теңдеудің шешімі де (2.2.2) теңдеуінің жалпы шешімімен бірдей түрге ие, яғни

$$v(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}}\left[q_1 J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + q_2 Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right],$$

Енді (2.2.1) теңдеуі үшін жалпы шекаралық шартын табайық, онда осы жалпы түрдегі шекаралық шартты қанағаттандыратын жалғыз шешімді іздеп отырғандықтан c_1, c_2 тұрақтылары f —ке сызықты үзіліссіз тәуелді, демек

$$c_1 = c_1(f),\ \ c_2 = c_2(f)$$

f —ке сызықты үзіліссіз тәуелді функционалдар, онда Рисс теоремасы бойынша

$$c_1 = \int_0^1 \sigma_1(x) f(x)dx,\ \ c_2 = \int_0^1 \sigma_2(x) f(x)dx.$$

Бірінші тарауда белгілі болғандай σ_1, σ_2 жұбы түйіндес оператордың өзегінде жатыр. Демек

$$c_1 = q_1 \int_0^1 x^{\frac{1-\beta}{2}} Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) f(x)dx, \tag{2.2.18}$$

$$c_2 = q_2 \int_0^1 x^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) f(x)dx, \tag{2.2.19}$$

онда жалпы шешімді келесі түрде қайта жазайық

$$\begin{aligned} y(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}} \Bigg[& \frac{\pi}{2-\beta} \int_0^x f(t) t^{\frac{1-\beta}{2}} \Bigg[J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\ & - J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\Bigg] dt \\ & + \Bigg[q_1 J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\ & + q_3 Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\Bigg] \int_0^1 t^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) f(t) dt \\ & + \Bigg[q_2 Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\ & + q_4 J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\Bigg] \int_0^1 t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) f(t) dt \Bigg], \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

мұнда $q_1, q_2, q_3, q_4 -$ кез келген тұрақты сан.

(2.2.1) теңдеуі үшін жалпы түрдегі шекаралық шарт табу үшін бірінші тараудағыдай, (2.2.20) өрнегіндегі f функциясын (2.2.1) теңдеуінің сол жағымен, яғни $\frac{d}{dx}\left[x^\beta \frac{d}{dx} y(x)\right] + ay(x)$ өрнегімен алмастырып, бөліктеп интегралдау әдісін қолданатын боламыз. Төменде жасалатын есептеулердің бәрінде Бессел функциясының 0-дегі мәндері (2.2.11) өрнегіндегі асимптотикалық формуласын пайдалану арқылы табылатын болады.

Ыңғайлылық үшін әрбір интегралдарды бөлек есептеп алайық:

i) $\int_0^x f(t) t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) dt = \int_0^x \left(\frac{d}{dt}\left(t^\beta \frac{d}{dt} y(t)\right) + ay(t)\right) t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) dt = t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) t^\beta \frac{d}{dt} y(t)\Big|_0^x - t^\beta \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) y(t)\Big|_0^x + \int_0^x y(t) \left(\frac{d}{dt}\left(t^\beta \frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\right) + a t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) dt;$

мұнда $t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)$ функциясы (2.2.2) біртекті теңдеудің шешімі екені белгілі, демек

$$\frac{d}{dt}\left(t^\beta\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\right)+at^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)=0.$$

Онда

$$\int\limits_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$
$$=t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_0^x$$
$$-t^\beta\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^x+0;$$

Ал $J_\nu(z)$ жəне $Y_\nu(z)$ Бессел функцияларының $z\longrightarrow 0$ кезіндегі (2.2.11) асимптотикаларын ескере отырып шекарадағы мəндерін есептейік. Онда

$$t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_0^x$$
$$=x^{\frac{1+\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{d}{dx}y(x)+\frac{2^\nu}{b^\nu sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\bigg|_{t=0}$$
$$=x^{\frac{1+\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{d}{dx}y(x)$$
$$+\frac{(2-\beta)^\nu}{\sqrt{a}^\nu sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\bigg|_{t=0};$$

Ал (2.2.6) формуладан

$$-t^\beta\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^x=-\left(\sqrt{a}t^{\frac{1}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^x;$$

мұнда $\nu-1<0$, онда $Y_{\nu-1}(z)\sim\frac{cos((\nu-1)\pi)}{sin((\nu-1)\pi)}J_{\nu-1}(z)=-ctg\big((1-\nu)\pi\big)J_{\nu-1}(z)$, онда

$$-t^{\beta}\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^x = -\left(\sqrt{a}t^{\frac{1}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^x$$

$$= -\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)y(x)$$

$$+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg\big((1-\nu)\pi\big)}{\Gamma(\nu)}y(0),$$

теңдігін аламыз, демек

$$\int_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$= t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_0^x$$

$$-t^{\beta}\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^x$$

$$= x^{\frac{1+\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{d}{dx}y(x) + \frac{(2-\beta)^{\nu}\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$-\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)y(x) + \frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0).$$

ii)

i)-дегі есептеу техникаларын пайдаланып $\int_0^1 f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$ анықталған интегралын есептейік:

$$\int_0^1 f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt = \int_0^1\left(\frac{d}{dt}\left(t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right)+ay(t)\right)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt =$$
$$t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_0^1 - t^{\beta}\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^1 +$$
$$\int_0^1 y(t)\left(\frac{d}{dt}\left(t^{\beta}\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\right)+at^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)dt;$$

мұнда

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\beta}\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\right)+at^{\frac{1-\beta}{2}}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)=0$$

екені белгілі. Онда

$$\int_0^1 f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$
$$= t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_0^1$$
$$- t^\beta\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^1 + 0$$
$$= Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1) + \frac{(2-\beta)^\nu\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\right]\Bigg|_{t=0}$$
$$- \sqrt{a}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y(1) + \frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0).$$

iii)

$$\int_0^x f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$
$$= \int_0^x\left(\frac{d}{dt}\left(t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\right) + ay(t)\right)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$
$$= t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_0^x$$
$$- t^\beta\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_0^x$$
$$+ \int_0^x y(t)\left(\frac{d}{dt}\left(t^\beta\frac{d}{dt}t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)\right.$$
$$\left.+ at^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)dt;$$

мұнда $t^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)$ функциясы біртекті теңдеудің шешімі екені белгілі, онда

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\beta}\frac{d}{dt}t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)+at^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)=0.$$

Ал $J_{\nu}(z)$ Бессел функцияларының $z\longrightarrow 0$ кезіндегі асимптотикалары $\nu=\frac{1-\beta}{2-\beta}$ саны үшін $J_{\nu}(z)\sim\frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$. Онда

$$\int_{0}^{x} f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$=t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_{0}^{x}$$

$$-t^{\beta}\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_{0}^{x}+0$$

$$=x^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)x^{\beta}\frac{d}{dx}y(x)-\left(\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(x)$$

$$+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0).$$

iv)

$$\int_{0}^{1} f(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$=\int_{0}^{1}\left(\frac{d}{dt}\left(t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right)+ay(t)\right)t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)dt$$

$$=t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\Bigg|_{0}^{1}-t^{\beta}\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(t)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$+\int_{0}^{1} y(t)\left(\frac{d}{dt}\left(t^{\beta}\frac{d}{dt}t^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)\right.$$

$$\left.+at^{\frac{1-\beta}{2}}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)dt$$

$$
= t^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) t^\beta \frac{d}{dt} y(t)\Bigg|_0^1 - t^\beta \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right) y(t)\Bigg|_0^1 + 0
$$

$$
= J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right) y'(1) - \left(\sqrt{a} J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right) y(1) + \frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} y(0).
$$

Ал i), ii), iii) және iv) есептеулерінен алынған нәтижелерді

$$
\begin{aligned}
y(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}} \Bigg[\frac{\pi}{2-\beta} \int_0^x f(t) t^{\frac{1-\beta}{2}} \Bigg[& J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\
& - J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\Bigg] dt \\
& + \Bigg[q_1 J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\
& + q_3 Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\Bigg] \int_0^1 t^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) f(t) dt \\
& + \Bigg[q_2 Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \\
& + q_4 J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\Bigg] \int_0^1 t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) f(t) dt \Bigg],
\end{aligned}
$$

өрнегіне қойып жойылатын мүшелерін қысқартып, ықшамдайық

$$
\begin{aligned}
y(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}} \Bigg[& -J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\Bigg(x^{\frac{1+\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{d}{dx}y(x) \\
& + \frac{(2-\beta)^\nu\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0} - \sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)y(x) \\
& + \frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg) \\
& + Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\Bigg(x^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)x^\beta\frac{d}{dx}y(x) \\
& - \left(\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(x) + \frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg) \\
& + \left[q_1J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + q_3Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\Bigg(J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1) \\
& - \left(\sqrt{a}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right)y(1) + \frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg) \\
& + \left[q_2Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + q_4J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\Bigg(Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1) \\
& + \frac{(2-\beta)^\nu\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0} - \sqrt{a}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y(1) \\
& + \frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$= x^{\frac{1-\beta}{2}}\left[-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\left(\frac{(2-\beta)^\nu\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}\right.\right.$$

$$-\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)y(x)$$

$$\left.+\frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)$$

$$+Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\left(-\left(\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)y(x)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)$$

$$+\left[q_1J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)+q_3Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\left(J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)\right.$$

$$\left.-\left(\sqrt{a}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right)y(1)+\frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)$$

$$+\left[q_2Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)+q_4J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\left(Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)\right.$$

$$+\frac{(2-\beta)^\nu\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}-\sqrt{a}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y(1)$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)\right]=$$

$$= y(x)+x^{\frac{1-\beta}{2}}\left[-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\left(\frac{(2-\beta)^\nu\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^\beta\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}+\right.\right.$$

$$\left.\frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)+Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\frac{\sqrt{a}^\nu(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)+$$

$$\left[q_1J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)+q_3Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\left(J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)-\left(\sqrt{a}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right)y(1)+\right.$$

$$\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg)+\left[q_2Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)+q_4J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\Bigg(Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)+$$

$$\frac{(2-\beta)^{\nu}\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Bigg|_{t=0}-\sqrt{a}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y(1)+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg)\Bigg];$$

Онда

$$x^{\frac{1-\beta}{2}}\Bigg[-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\Bigg(\frac{(2-\beta)^{\nu}\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg)$$

$$+Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\frac{\pi}{2-\beta}\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)$$

$$+\left[q_1J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)+q_3Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\Bigg(J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)$$

$$-\left(\sqrt{a}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right)y(1)+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg)$$

$$+\left[q_2Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)+q_4J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right]\Bigg(Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)$$

$$+\frac{(2-\beta)^{\nu}\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Bigg|_{t=0}-\sqrt{a}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y(1)$$

$$+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\Bigg)\Bigg]=0.$$

Қортындылай келе J_ν және Y_ν функцияларының сызықты тәуелсіздігінен (2.2.1) теңдеуі үшін шекаралық шарттың жалпы түрін аламыз: J_ν бойынша

$$-\frac{\pi}{2-\beta}\left(\frac{(2-\beta)^{\nu}\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg\big((1-\nu)\pi\big)}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)$$

$$+q_1\left(J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)-\left(\sqrt{a}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right)y(1)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)$$

$$+q_4\left(Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)+\frac{(2-\beta)^{\nu}\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}\right.$$

$$\left.-\sqrt{a}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y(1)+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)=0;$$

Және Y_{ν} бойынша

$$\frac{\pi}{2-\beta}\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)$$

$$+q_3\left(J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)-\left(\sqrt{a}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right)y(1)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)$$

$$+q_2\left(Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y'(1)+\frac{(2-\beta)^{\nu}\sqrt{a}^{-\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}\right.$$

$$\left.-\sqrt{a}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)y(1)+\frac{\sqrt{a}^{\nu}(2-\beta)^{1-\nu}ctg((1-\nu)\pi)}{\Gamma(\nu)}y(0)\right)=0;$$

Немесе

$$\left(-\frac{\pi}{2-\beta}+q_4\right)\frac{(2-\beta)^{\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}$$
$$+\left[q_1\sqrt{a}^{\nu}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)+q_4\sqrt{a}^{\nu}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right]y'(1)$$
$$+\left[q_1+q_4ctg((1-\nu)\pi)-\frac{\pi\, ctg\big((1-\nu)\pi\big)}{2-\beta}\right]\frac{\sqrt{a}^{2\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)$$
$$-\left[q_1\sqrt{a}^{1-\nu}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)+q_4\sqrt{a}^{1-\nu}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right]y(1)=0;$$

және

$$q_2\frac{(2-\beta)^{\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}\left[t^{\beta}\frac{d}{dt}y(t)\right]\Big|_{t=0}$$
$$+\left[q_3\sqrt{a}^{\nu}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)+q_2\sqrt{a}^{\nu}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right]y'(1)$$
$$+\left[\frac{\pi}{2-\beta}+q_3+q_2ctg((1-\nu)\pi)\right]\frac{\sqrt{a}^{2\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}y(0)$$
$$-\left[q_3\sqrt{a}^{1-\nu}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)+q_2\sqrt{a}^{1-\nu}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right]y(1)=0;$$

Ал бұл жалпы түрдегі шекаралық шартты келесі матрицалық түрде жазсақ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} t^{\beta}y'(t)\big|_{t=0} \\ y'(1) \\ y(0) \\ y(1) \end{pmatrix}=0; \qquad (2.2.21)$$

мұнда $a_{11}=\left(-\frac{\pi}{2-\beta}+q_4\right)\frac{(2-\beta)^{\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}$;

$a_{12}=q_1\sqrt{a}^{\nu}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)+q_4\sqrt{a}^{\nu}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)$;

$a_{13}=\left[q_1+q_4ctg((1-\nu)\pi)-\frac{\pi\, ctg\big((1-\nu)\pi\big)}{2-\beta}\right]\frac{\sqrt{a}^{2\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}$;

$a_{14}=-\left[q_1\sqrt{a}^{1-\nu}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)+q_4\sqrt{a}^{1-\nu}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)\right]$;

$a_{21}=q_2\frac{(2-\beta)^{\nu}}{sin(\nu\pi)\Gamma(1-\nu)}$;

$a_{22}=q_3\sqrt{a}^{\nu}J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)+q_2\sqrt{a}^{\nu}Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)$

$a_{23}=\left[\frac{\pi}{2-\beta}+q_3+q_2ctg((1-\nu)\pi)\right]\frac{\sqrt{a}^{2\nu}(2-\beta)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}$

$$a_{24}=-q_3\sqrt{a}^{1-\nu}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right)-q_2\sqrt{a}^{1-\nu}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta}\right);$$

Демек келесі Лемма орынды

2.2.1 - Лемма Кез келген $f\in L_2(0,1)$ және әрбір $q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbb{R}$ үшін (2.2.1) теңдеуінің (2.2.21) шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар.

Айқындылық үшін (2.2.21) шартын қарапайым, дербес жағдайлармен салыстырып көрейік. (2.2.1) теңдеуінің $a=0$, $0\le\beta<1$ жағдайында

$$\frac{d}{dx}\left[x^\beta\frac{d}{dx}y(x)\right]=f(x),$$

оның жалпы шешімі келесі түрде болады

$$y(x)=\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\int\limits_0^x f(t)dt-\frac{1}{1-\beta}\int\limits_0^x f(t)t^{1-\beta}dt+\left[q_1\frac{1}{1-\beta}+q_3\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]\int\limits_0^1 f(x)dx$$
$$+\left[q_2\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}+q_4\frac{1}{1-\beta}\right]\int\limits_0^1 f(x)x^{1-\beta}dx.$$

Үйреншікті әдісімізбен $f(x)$ функциясын $\frac{d}{dx}\left[x^\beta\frac{d}{dx}y(x)\right]$ өрнегімен алмастырып, интегралды есептесек келесі жалпы түрдегі шекаралық шартты аламыз

$$\begin{pmatrix}-1-q_4 & q_1+q_4 & q_1(1-\beta) & -q_1(1-\beta)\\ -q_2 & q_2+q_3 & (q_3-1)(1-\beta) & -q_3(1-\beta)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x^\beta y'(x)\big|_{x=0}\\ y'(1)\\ y(0)\\ y(1)\end{pmatrix}=0. \tag{2.2.21*}$$

2.2.2 - Теорема Кез келген $f\in L_2(0,1)$, $a>0$, $0\le\beta<1$ және әрбір $q_1,q_2\in\mathbb{R}$ үшін (2.2.1) және (2.2.21) есебінің $y\in W^2_{2,x^\beta}(0,1)$ жалғыз шешімі бар және ол келесі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\|y\|_{W^2_{2,x^\beta}(0,1)}:=\left\|\frac{d}{dx}\left(x^\beta\frac{dy}{dx}\right)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|x^\beta\frac{dy}{dx}\right\|_{W_2^1(0,1)}+\|y\|_{L_2(0,1)}\le c\|f\|_{L_2(0,1)}.$$

Дәлелдеуі. Бессел функциясы үшін $0<x<1$, $0\le\beta<1$ және $0<\nu=\frac{1-\beta}{2-\beta}\le\frac{1}{2}$ болғанда келесі өрнек белгілі [55, 360 бет]

$$J_\nu(z) = \frac{2^{1-\nu} z^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_1^\infty \frac{\sin(zt)}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}+\nu}} dt\,; \left(|\nu| < \frac{1}{2}, x > 0\right) \qquad (2.2.23)$$

$$Y_\nu(z) = -\frac{2^{1-\nu} z^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_1^\infty \frac{\cos(zt)}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}+\nu}} dt\,; \left(|\nu| < \frac{1}{2}, x > 0\right) \qquad (2.2.24)$$

Алдымен $\nu = \frac{1-\beta}{2-\beta} = \frac{1}{2}$ жағдайын бөлек қарастырып, $\nu < \frac{1}{2}$ жағдайы үшін (2.2.23)-(2.2.24) өрнектерін қолданатын боламыз. $\nu = \frac{1-\beta}{2-\beta} = \frac{1}{2}$ болсын, онда $\beta = 0$, ал бірінші және екінші текті Бессел функциялары үшін келесі формулалар белгілі

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi z}} \sin(z);$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi z}} \cos(z)\,;$$

Онда, $\nu < \frac{1}{2}$ үшін (2.2.23)- (2.2.24) өрнектерінен келесі бағалау орынды екенін көреміз

$$\left| x^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right| \le \left| x^{\frac{1-\beta}{2}} \frac{2^{1-\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\right| \left| \int_1^\infty \frac{\sin(zt)}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}+\nu}} dt \right| = c_1\left(\sqrt{a}\right)^{-\nu}. \qquad (2.2.25)$$

Және дәл осындай бағалау екінші текті Бессел функциясы үшін де орынды

$$\left| x^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right| \le c_1\left(\sqrt{a}\right)^{-\nu}. \qquad (2.2.26)$$

Айта кету керек $\nu = \frac{1-\beta}{2-\beta} = \frac{1}{2}$ жағдайын үшін де (2.2.25)-(2.2.26) теңсіздіктері орынды екенін оңай көруге болады. (2.2.25) және (2.2.26) теңсіздіктерін және Гёльдер теңсіздігін пайдаланып $y(x)$, $\frac{d}{dx}y(x)$ функцияларын бағалайық. (2.2.1) теңдеуінің $y(x)$ жалпы шешімі (2.2.20) өрнегімен анықталды, дегенмен бізге керекті бағалауларды тек Коши есебінің шешімі (2.2.12) үшін ғана көрсетсек жеткілкті, өйткені біртекті теңдеудің шешімі үшін де бұл бағалаулар орынды екенін айқын.

$$
\begin{aligned}
|y(x)| \le &\left| x^{\frac{1-\beta}{2}} \left[-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \frac{\pi}{2-\beta} \int_0^x f(t) t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) dt \right.\right. \\
&\left.\left. + Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \frac{\pi}{2-\beta} \int_0^x f(t) t^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) dt \right] \right| \\
&\le \frac{\pi}{2-\beta} \left| x^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \right| \int_0^x |f(t)| \left| t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \right| dt \\
&+ \frac{\pi}{2-\beta} \left| x^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \right| \int_0^x |f(t)| \left| t^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \right| dt \\
&\le C_1 \left(\sqrt{a}\right)^{-2\nu} \|f\|_{L_2(0,1)};
\end{aligned}
\tag{2.2.27}
$$

мұнда $C_1(\beta) < \infty$ тұрақты сан. Бұл жерден $y \in L_2(0,1)$ екені айқын түрде шығады. Ал $\frac{d}{dx} y(x)$ туындысы (2.2.14) өрнекте берілген, онда (2.2.25)-(2.2.26) теңсіздіктерінен келесі бағалаулар оңай шығады

$$
\begin{aligned}
&\left| x^\beta \frac{d}{dx} y(x) \right| \\
&= \left| -\sqrt{a} x^{\frac{1}{2}} J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \frac{\pi}{2-\beta} \int_0^x f(t) t^{\frac{1-\beta}{2}} Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) dt \right. \\
&\left. + \sqrt{a} x^{\frac{1}{2}} Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) \frac{\pi}{2-\beta} \int_0^x f(t) t^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{a}}{2-\beta} t^{\frac{2-\beta}{2}}\right) dt \right| \\
&\le C_3 \sqrt{a}^{1-2\nu} \|f\|_{L_2(0,1)};
\end{aligned}
\tag{2.2.28}
$$

Ал енді $f, y \in L_2(0,1)$ екенін ескерсек және

$$
\frac{d}{dx}\left(x^\beta \frac{d}{dx} y(x)\right) = f(x) - a y(x),
$$

болғандықтан $\frac{d}{dx}\left(x^\beta \frac{d}{dx} y(x)\right) \in L_2(0,1)$ екені түсінікті. Онда $x^\beta \frac{dy}{dx} \in L_2(0,1)$ және $\frac{d}{dx}\left(x^\beta \frac{d}{dx} y(x)\right) \in L_2(0,1)$ болғандықтан $x^\beta \frac{dy}{dx} \in W_2^1(0,1)$. Ал (2.2.23)-(2.2.26) теңсіздіктерінен $\left| x^\beta \frac{dy}{dx} \right|$ және $|y(x)|$ шамалары $\|f\|_{L_2(0,1)}$ арқылы бағалаулары бар екенін көрдік, онда олардың $L_2(0,1)$ нормасы да $\|f\|_{L_2(0,1)}$ арқылы бағаланатыны айқын. 2.2.2 - Теорема дәлелденді.

2.3 Әлсіз азғындалған гиперболалық дифференциалдық теңдеу үшін түрлендірілген Коши есебі

Коши есебі қатаң гиперболалық теңдеулер үшін қисынды қойылғаны белгілі. Ал азғындалған гиперболалық теңдеу үшін Коши есебінің қисындылығы бұзылады, яғни гиперболалық теңдеу сипаттамалық сызық бойында азғындалса немесе гиперболалық теңдеудің кіші мүшелеріндегі коэффициенттері сингуляр болса бұл гиперболалық теңдеу үшін Коши есебі қисынды болмайды. Сондықтан бастапқы шарттар салмақтық функциялармен берілген, «түрлендірілген» Коши есебін қарастыру әлдеқайда табиғи болып саналады.

Тегіс $\partial\Omega \subset C^2$ шекарасы ақырлы $\Omega \subset \mathbb{R}^n -$ облысы және $D = \Omega \times [0,1] -$цилиндрлік облыс болсын. Төмендегі азғындалған гиперболалық теңдеу үшін келесі есепті қарастырайық.

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u\right) - \Delta_x u = f(x,t) \tag{2.3.1}$$

теңдеуі

$$u(x,0) = 0, \;\; t^{\beta}u_t(x,t)\big|_{t=0} = 0. \tag{2.3.2}$$

Бастапқы шартын және

$$N[u] \equiv -\frac{u(x,t)}{2} + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_{\xi}}(x,\xi)\cdot u(\xi,t) - \varepsilon(x,\xi)\cdot\frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi,t)\right)d\xi = 0,$$
$$0 < t < 1, \; x \in \partial\Omega, \tag{2.3.3}$$

бүйірлік шекаралық шартын қанағаттандыратын шешімін тап, мұндағы $0 \le \beta < 1$, ал $f \in L_2(D)$.

Ньютон потенциалының меншікті функциялары келесі теңдеуді

$$-\Delta e_m(x) = \lambda_m e_m(x),$$

және

$$N[e_m] \equiv -\frac{e_m(x)}{2} + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_{\xi}}(x,\xi)e_m(\xi) - \varepsilon(x,\xi)\frac{\partial e_m}{\partial n_{\xi}}(\xi)\right)d\xi = 0, x \in \partial\Omega.$$

шекаралық шартын қанағаттандырады. Ал бұл өз-өзіне түйіндес шекаралық есептерінің $\{e_m(x)\}$ меншікті функциялар жиыны $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толықтығы белгілі. Онда

$$u(x,t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} u_m(t)e_m(x), \;\; e_m = e_{m_1 m_2 \dots m_n}, \tag{2.3.4}$$

түрінде жазуға болады және

$$f(x,t)=\sum_{|m|=1}^{\infty} f_m(t)e_m(x), \qquad (2.3.5)$$

мұнда

$$u_m(t)=\int_\Omega u(x,t)e_m(x)dx,\;\; f_m(t)=\int_\Omega f(x,t)e_m(x)dx.$$

Бұл жерден, $u(x,t)$ функциясы (2.3.2) шартын қанағаттандырса $u_m(t)$ функциясы да (2.3.2) шартын қанағаттандыратыны айқын.

(2.3.4)- (2.3.5) өрнектерді бастапқы (2.3.1) теңдеуіне қойсақ:

$$Lu=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^\beta\frac{\partial}{\partial t}u\right)-\Delta_x u=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^\beta\frac{\partial}{\partial t}\sum_{|m|=1}^{\infty} u_m(t)e_m(x)\right)-\Delta_x\sum_{|m|=1}^{\infty} u_m(t)e_m(x)$$
$$=f(x,t)=\sum_{|m|=1}^{\infty} f_m(t)e_m(x).$$

Онда, $\{e_m(x)\}$ сызықты тәуелсіз жүйенің қасиетін ескере отырып, айнымалыларды ажырату әдісін пайдаланып $u_m(t)$ функциясы үшін келесі бір өлшемді теңдеуді аламыз

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^\beta\frac{\partial}{\partial t}u_m(t)\right)+\lambda_m u_m(t)=f_m(t). \qquad (2.3.5)$$

Келесі Коши есебін қарастырайық

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^\beta\frac{\partial}{\partial t}u_m(t)\right)+\lambda_m u_m(t)=f_m(t);\\ \quad u_m(0)=t^\beta\frac{\partial}{\partial t}u_m(t)\Big|_{t=0}=0.\end{cases} \qquad (2.3.6)$$

Бұл Коши есебінің шешімі 2.2 бөлімінде көрсетілгендей (2.2.14) формуласымен айқын түрі анықталады, яғни

$$u_m(t)=\frac{\pi}{2-\beta}t^{\frac{1-\beta}{2}}\int_0^t f_m(\xi)\xi^{\frac{1-\beta}{2}}\left(J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right.$$
$$\left.-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)d\xi.$$

(2.3.7)

Енді бастапқы есептің шешіміне оралайық. (2.3.1) есебі үшін $u(x,0) = t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big|_{t=0} = 0$ және (2.3.3) шартын қанағаттандыратын шешімі келесі түрге ие

$$u(x,t) = \sum_{|m|=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2-\beta}t^{\frac{1-\beta}{2}}\int_{0}^{t} f_m(\xi)\xi^{\frac{1-\beta}{2}}\left(J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)d\xi\right]e_m(x). \tag{2.3.8}$$

(2.2.25) теңсіздігін ескеріп, $\{e_m(x)\}$ ортонормаланған жүйе болғандықтан $u(x,t)$ функциясының $L_2(D)$ нормасы Парсевал теңдігінен келесідей анықталады

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{|m|=1}^{\infty}|u_m|^2$$
$$= \sum_{|m|=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2-\beta}t^{\frac{1-\beta}{2}}\int_{0}^{t} f_m(\xi)\xi^{\frac{1-\beta}{2}}\left(J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-J_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_{\nu}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)d\xi\right]^2;$$

(2.2.25)-(2.2.26) теңсіздіктерінен

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{|m|=1}^{\infty}|u_m|^2 \le c_1\sum_{|m|=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2-\beta}\right)^2\left[\lambda_m{}^{-\nu}\int_{0}^{1}|f_m(\xi)|d\xi\right]^2; \tag{2.3.9}$$

мұнда c_1 тек β −ға тәуелді тұрақты оң сан. $\frac{\partial}{\partial t}u_m$ өрнегі (2.2.14) формуласымен анықталады, онда

$$\left\|t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u\right\|_{L_2(D)}^2=\sum_{|m|=1}^{\infty}\left|t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u_m\right|^2$$
$$\le\sum_{|m|=1}^{\infty}\left|\frac{\pi}{2-\beta}t^{\frac{1-\beta}{2}}\int_0^t f_m(\xi)\xi^{\frac{1-\beta}{2}}\left(J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right)d\xi\right|^2$$
$$\le\sum_{|m|=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2-\beta}\right)^2\left(\left|-\sqrt{\lambda_m}x^{\frac{1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right|\int_0^t|f_m(\xi)|\left|\xi^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right|d\xi\right.$$
$$\left.+\left|\sqrt{\lambda_m}x^{\frac{1}{2}}Y_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right|\int_0^t|f_m(\xi)|\left|\xi^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right|d\xi\right)^2,$$

ал $\left|t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u_m\right|$ үшін 2.3 бөлімде (2.2.28) теңсіздігін алғанбыз, осы теңсіздікті пайдалансақ

$$\left\|t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u\right\|_{L_2(D)}^2=\sum_{|m|=1}^{\infty}\left|t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u_m\right|^2\le c_3\sum_{|m|=1}^{\infty}\left[\sqrt{\lambda_m}^{1-2\nu}\int_0^t|f_m(\xi)|d\xi\right]^2$$
$$=c_4\sum_{|m|=1}^{\infty}\left[\sqrt{\lambda_m}^{1-2\nu}\int_0^1|f_m(\xi)|d\xi\right]^2. \tag{2.3.10}$$

мұнда c_3, c_4 тек β –ға тәуелді тұрақты сандар.

$$-\Delta_x u(x,t)=-\Delta_x\sum_{|m|=1}^{\infty}u_m(t)e_m(x)=\sum_{|m|=1}^{\infty}u_m(t)\lambda_m e_m(x)$$
$$=\sum_{|m|=1}^{\infty}\frac{\pi}{2-\beta}t^{\frac{1-\beta}{2}}\left[-J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\int_0^t f_m(\xi)\xi^{\frac{1-\beta}{2}}Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)d\xi\right.$$
$$\left.+Y_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}t^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\int_0^t f_m(\xi)\xi^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\left(\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{2-\beta}\xi^{\frac{2-\beta}{2}}\right)d\xi\right]\lambda_m e_m(x).$$

(2.3.9) теңсіздігін пайдалансақ, $-\Delta_x u$ үшін Парсевал теңдігінен

$$\|\Delta_x u\|^2_{L_2(D)} = \sum_{|m|=1}^{\infty} |\lambda_m u_m(t)|^2 \le \mathrm{c}_5 \sum_{|m|=1}^{\infty} \left[(\lambda_m)^{1-\nu} \int_0^1 |f_m(\xi)| d\xi \right]^2 \le$$
$$\le \mathrm{c}_5 \int_0^1 \sum_{|m|=1}^{\infty} |(\lambda_m)^{1-\nu} f_m(\xi)|^2 d\xi = c_5 \|(\Delta_x)^{1-\nu} f\|^2_{L_2(D)}. \qquad (2.3.11)$$

мұнда $\int_0^t |f_m(\xi)| d\xi \le \int_0^1 |f_m(\xi)| d\xi \le \sqrt{\int_0^1 |f_m(\xi)|^2 d\xi}$ Гельдер теңсіздігін қолдандық. Ал $\sum_{|m|=1}^{\infty} |(\lambda_m)^{1-\nu} f_m(\xi)|^2 d\xi := \|(\Delta_x)^{1-\nu} f\|^2_{L_2(D)}$.

(2.3.6) Коши есебі үшін 2.2.2 - теоремасы орынды екенін 2.2 бөлімінде көрсеттік. Ал 2.2.2 - теоремасының жалпыламасы ретінде (2.3.1)- (2.3.3) есебі үшін келесі теорема орынды екенін көрсетеміз.

2.3.1 - Теорема $D = \Omega \times [0,1]$ −цилиндрлік облыс болсын. $0 \le \beta < 1$, $f \in L_2(D)$ және $\sum_{|m|=1}^{\infty} |(\lambda_m)^{1-\nu} f_m(\xi)|^2 < \infty$ болсын. Онда (2.3.1)-(2.3.3) Коши есебінің $u \in W^{2,2}_{2,t^\beta}(D)$ жалғыз шешімі бар және ол келесі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,t^\beta}(D)} = \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[t^\beta \frac{\partial}{\partial t} u \right] \right\|_{L_2(D)} + \left\| t^\beta \frac{\partial}{\partial t} u \right\|_{W_2^1(D)} + \|\Delta_x u\|_{L_2(D)} + \|u\|_{L_2(D)}$$
$$\le c\|f\|_{L_2(D)} + c_0 \|(\Delta_x)^{1-\nu} f\|_{L_2(D)}.$$

мұнда c, c_0 − сандары f −ке тәуелсіз тұрақты сандар.

Дәлелдеуі. Шешімнің (2.3.4) айқын түрі белгілі болғандықтан және (2.3.9) теңсіздігінен

$$\|u\|_{L_2(D)} \le c_6 \|f\|_{L_2(D)}$$

теңсіздігі шығады. (2.3.10) теңсіздігінен

$$\left\| t^\beta \frac{\partial}{\partial t} u \right\|_{L_2(D)} \le c_7 \|f\|_{L_2(D)} + c_8 \|(\Delta_x)^{1-\nu} f\|_{L_2(D)}.$$

(2.3.11) теңсіздігінен

$$\|\Delta_x u\|_{L_2(D)} \le c_9 \|(\Delta_x)^{1-\nu} f\|_{L_2(D)}.$$

(2.3.1) теңдеуін

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^\beta \frac{\partial}{\partial t} u \right) = f(x,t) + \Delta_x u$$

түрінде жазып алып норманың қасиетін пайдалансақ келесі теңсіздікті аламыз

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u\right]\right\|_{L_2(D)} \le \|f\|_{L_2(D)} + \|\Delta_x u\|_{L_2(D)} \le \|f\|_{L_2(D)} + c_9\|(\Delta_x)^{1-\nu}f\|_{L_2(D)}.$$

Теорема дәлелденді.

2.3.2 - Салдар *2.2 тарауда жалпы түрдегі шекаралық шарт табу барысында байқағанымыздай, (2.2.21) шарты әрбір бекітілген* α *(бұл бөлімдегі* λ_m*) спектралды параметрі үшін және оған сәйкес меншікті функциясы үшін орындалса, онда қарастырылып отырған теңдеу үшін осы (2.2.21) шартпен қойылған есептің қисындылығы теориядан белгілі және ол – Коши шартымен қойылған есептің қисындылығымен пара-пар екенін байқауға болады. Дәлірек айтқанда:*

Тегіс $\partial\Omega \subset C^2$ шекарасы ақырлы $\Omega \subset \mathbb{R}^n -$ облысы және $D = \Omega \times [0,1] -$цилиндрлік облыс болсын.

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u\right) - \Delta_x u = f(x,t),$$

әрбір u_m, (2.2.21) түріндегі бастапқы шартты қанағаттандырсын, яғни

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}u_m(t)\Big|_{t=0} \\ \frac{\partial}{\partial t}u_m(1) \\ u_m(0) \\ u_m(1) \end{pmatrix} = 0,$$

$$N[u] \equiv -\frac{u(x,t)}{2} + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_{\xi}}(x,\xi)\cdot u(\xi,t) - \varepsilon(x,\xi)\cdot\frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi,t)\right)d\xi = 0,$$
$$0 < t < 1, \qquad x \in \partial\Omega,$$

мұндағы a_{ij} әрбір u_m-ге сәйкес λ_m −ге тәуелді анықталады (2.2.21).

Бұл есептің шешілімділігі (2.3.1)- (2.3.3) есебінің шешілімдігімен пара-пар.

3 СИПАТТАУЫШ ЕМЕС АЗҒЫНДАЛҒАН ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ БҮЙІРЛІК ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТЫ АРАЛАС КОШИ ЕСЕБІ

Диссертацияның бұл бөлігінде Ньютон (көлем) потенциалының шекаралық шартын пайдалана отырып, сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас Коши есебін зерттейміз. Қарастырылып отырған есептердің әртүрлі бүйірлік шекаралық шарттары бар аралас Коши есебінің шешімдері салмақты кеңістіктерде алынатын осы тақырыпқа арналған басқа жұмыстардан айырмашылығы, бұл жұмыста қарастырылатын аралас Коши есептерінің барлық шешімдері классикалық Соболев кеңістігінде алынған.

3.1 Есептің қойылуы

Тегіс $\partial\Omega \subset C^2$ шекарасы ақырлы $\Omega \subset R^n -$ обылысы болсын, $D = \Omega \times [0, T]$ −цилиндрлік облыс болсын. Осы D облысында келесі аралас Коши есебін қарастырайық:

$$Lu = u_{tt} - k(t)\Delta_x u + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(t)u = f(x,t), \tag{3.1.1}$$

теңдеуін

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{3.1.2}$$

бастапқы шартын және

$$N[u] \equiv -\frac{u(x,t)}{2} + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_\xi}(x,\xi)\cdot u(\xi,t) - \varepsilon(x,\xi)\cdot\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t)\right)d\xi = 0, \tag{3.1.3}$$

$$0 < t < T, \; x \in \partial\Omega,$$

бүйірлік шекаралық шартын қанағаттандыратын шешімін тап, мұндағы $k \in C^{1+\alpha}[0,T]$, $0 < \alpha < 1$, $k(t) > 0$, $t > 0$, $k(0) = 0$, $k'(t) \geq 0$, және $\varepsilon(x,\xi)$ функциясы (3.1.1) теңдеудің іргелі шешімі.

Ньютон потенциалының меншікті функциялары келесі теңдеуді

$$-\Delta e_m(x) = \lambda_m e_m(x), \tag{3.1.4}$$

және

$$N[e_m] \equiv -\frac{e_m(x)}{2} + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_\xi}(x,\xi)e_m(\xi) - \varepsilon(x,\xi)\frac{\partial e_m}{\partial n_\xi}(\xi)\right)d\xi = 0, x \in \partial\Omega. \tag{3.1.5}$$

шекаралық шартын қанағаттандырады.

Ал (3.1.4)-(3.1.5) өз-өзіне түйіндес шекаралық есептерінің $\{e_m(x)\}$ меншікті функциялар жиыны $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық ортонормаланған екені белгілі.

Айта кету керек, $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$ жағдайы үшін екі өлшемді (3.1.1) теңдеуі - Чаплыгин теңдеуі болып табылады, ол сұйықтық пен газдың жоғары ағынын модельдеу үшін қолданылады.

Бұдан әрі (3.1.3) - шекаралық шартын потенциалды шекаралық шарт деп атаймыз. (3.1.1)-(3.1.3) есептің шекаралық шарты қиын болғанына қарамастан, бұл есептің Грин функциясы Лаплас теңдеуінің $\varepsilon(x,\xi)$ іргелі шешімімен сәйкес келеді, бұл Грин функциясының еркін облыста айқын түрде берілтінін білдіреді.

Қатаң гиперболалық теңдеулер жағдайындағыдай, біз алдымен $u \in W_2^1(D)$ және $u \in W_2^2(D)$ екенін сәйкесінше $\left\|\frac{f}{k}\right\|_{L_2(\Omega)}(t) < \infty,\ t \in [0,T]$ және $\frac{a}{k} \in C^{1+\alpha}(\overline{D}),\ \frac{b}{k} \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$ шарттарын қоя отырып көрсетеміз.

3.2 Аралас Коши есебінің $\boldsymbol{a(t) \equiv b(t) \equiv 0}$ жағдайы

Бұл бөлімде (3.1.1)-(3.1.3) есептерін $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$ жағдайы үшін қарастырамыз:

$$Lu = u_{tt} - k(t)\Delta_x u = f(x,t),\ \ k(t) > 0,\ t > 0,\ k(0) = 0,\ \ k'(t) \geq 0, \quad (3.2.1)$$

$$u|_{t=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad (3.2.2)$$

$$N[u] \equiv -\frac{u(x,t)}{2} + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_\xi}(x,\xi)\cdot u(\xi,t) - \varepsilon(x,\xi)\cdot\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t)\right)d\xi = 0, \quad (3.2.3)$$

$$(x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$

болсын.

(3.2.3) түрінде берілген потенциалды шекаралық шарттың күрделілігіне байланысты (3.2.1)-(3.2.3) есептің априорилық бағалауын орнату үшін спектрлік жіктелу әдісін қолданамыз.

$\{e_m(x)\} -$ жүйесі (3.1.4)-(3.1.5) есептің толық ортонормаланған меншікті функциялар жүйесі болсын. Спектрлік жіктелуді қолдансақ (3.2.1)-(3.2.3) есебінің шешімін

$$u(x,t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} u_m(t)e_m(x),\ \ e_m = e_{m_1 m_2 \dots m_n}, \quad (3.2.4)$$

түрінде жазуға болады және

$$f(x,t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} f_m(t)e_m(x), \quad (3.2.5)$$

мұнда

$$u_m(t) = \int_\Omega u(x,t)e_m(x)dx, \;\; f_m(t) = \int_\Omega f(x,t)e_m(x)dx.$$

Алынған (3.2.4) және (3.2.5) өрнектерін (3.2.1) теңдеуге қойсақ

$$Lu = \sum_{|m|=1}^{\infty} [u_m(t)e_m(x)]_{tt} - k(t)\sum_{|m|=1}^{\infty} \Delta_x[u_m(t)e_m(x)] = \sum_{|m|=1}^{\infty} f_m(t)e_m(x);$$

Бұл өрнекті түрлендірсек

$$Lu = \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{d^2u_m}{dt^2}(t)e_m(x) + k(t)\sum_{|m|=1}^{\infty} u_m(t)\lambda_m e_m(x)$$
$$= \sum_{|m|=1}^{\infty}\left[\frac{d^2u_m}{dt^2}(t) + \lambda_m k(t)u_m(t)\right]e_m(x) = \sum_{|m|=1}^{\infty}\sum_{|m|=1}^{\infty} f_m(t)e_m(x),$$

онда $u_m(t)$ функциясы үшін төмендегі бір өлшемді Коши есебін аламыз:

$$\frac{d^2u_m}{dt^2} + \lambda_m k(t)u_m(t) = f_m(t), \tag{3.2.6}$$

$$u_m(0) = 0, \;\; \frac{d}{dt}u_m(0) = 0. \tag{3.2.7}$$

3.2.1 - Лемма (3.2.6)-(3.2.7) Коши есепбінің барлық $u_m \in W_2^2(0,T)$ шешімдері келесі бағалауды қанағаттандырады

$$\frac{1}{k(t)}\left|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|^2(t) + \lambda_m u_m^2(t) + \int_0^t \frac{k(\eta)}{k^2(\eta)}\left|\frac{\partial u_m}{\partial \eta}\right|^2(\eta)d\eta \le d_1\int_0^t \left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right|^2 d\eta, \tag{3.2.8}$$

мұнда d_1 тұрақтысы;

f −ке тәуелсіз қандайда бір оң сан.

Дәлелдеуі. $u_m(0) = 0$ және $\frac{du_m}{dt}(0) = 0$ бастапқы шартын ескере отырып төмендегі

$$\frac{du_m}{dt}(t) = \int_0^t \frac{d^2u_m}{d\eta^2}(\eta)d\eta \;\; \text{және} \;\; u_m(t) = \int_0^t \frac{du_m}{d\eta}d\eta \tag{3.2.9}$$

теңдіктерді аламыз.

(3.2.6)-теңдеудің екі жағын да 0-ден t-ға дейін интегралдасақ және (3.2.9) теңдікті пайдаланып

$$\int_0^t \frac{d^2u_m}{d\eta^2}(\eta)d\eta + \lambda_m \int_0^t k(\eta)u_m(\eta)d\eta \quad = \frac{du_m}{dt} + \lambda_m \int_0^t k(\eta)(t-\eta)\frac{du_m}{d\eta}d\eta = \int_0^t k(\eta)\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}d\eta. \tag{3.2.10}$$

теңдігін аламыз.

$\frac{f_m}{k} \in L_2(0,T)$ болсын, онда (3.2.10)-интегралдық теңдеуі Вольтерра интегралдық теңдеуі болады. Сондай-ақ, $k' \geq 0$ болғандықтан

$$\int_0^t k(\eta)\left|\frac{f(\eta)}{k(\eta)}\right|d\eta \leq \sup_{0\leq\xi\leq t} k(\xi)\int_0^t \left|\frac{f(\eta)}{k(\eta)}\right|d\eta = k(t)\int_0^t \left|\frac{f(\eta)}{k(\eta)}\right|d\eta$$

теңсіздігі орынды және

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|(t) \leq C_m k(t)\int_0^t \left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right|d\eta, \tag{3.2.11}$$

теңсіздігі де орынды, мұндағы C_m тұрақтысы λ_m меншікті мәніне тәуелді.

Енді біз (3.2.6)-(3.2.7) есептің қажетті априорилық бағалауларын аламыз және бұл есепті келесі түрде қайта жазамыз

$$\frac{1}{k(t)}\frac{d^2u_m}{dt^2}(t) + \lambda_m u_m(t) = \frac{f_m(t)}{k(t)}, \tag{3.2.12}$$

$$u_m(0) = u'_m(0) = 0.$$

(3.2.12) теңдеуінің $\frac{du_m(t)}{dt}$ өрнегіне $L_2(0,T)$ −дегі скаляр көбейтіндісін есептейік

$$\int_0^t \frac{1}{2}k(\eta)\frac{d^2u_m}{d\eta^2}(\eta)\frac{du_m}{d\eta}d\eta + \lambda_m\int_0^t u_m(\eta)\frac{du_m}{d\eta}d\eta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{k(\eta)}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{du_m}{d\eta}\right)^2 d\eta + \frac{\lambda_m}{2}\int_0^t \frac{du_m^2}{d\eta}(\eta)d\eta$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{k(t)}\left(\frac{du_m}{dt}\right)^2(t) - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{k(t)}\left(\frac{du_m}{dt}\right)^2(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{d}{d\eta}\frac{1}{k(\eta)}\right)\left(\frac{du_m}{d\eta}\right)^2 d\eta + \frac{\lambda_m}{2}u_m^2(t)$$
$$= \int_0^t \frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\frac{du_m(\eta)}{d\eta}d\eta.$$

(3.2.11) теңсіздігінен

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{k(t)}\left(\frac{du_m}{dt}\right)^2(t) = 0$$

екені шығады.

Ал $-\frac{d}{d\eta}\frac{1}{k(\eta)}=\frac{k\prime(\eta)}{k^2(\eta)}$ теңдігінен және

$$\int_0^t \frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\frac{du_m(\eta)}{d\eta}d\eta \le \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \left|\frac{du_m(\eta)}{d\eta}\right|^2 d\eta+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right|^2 d\eta \qquad (3.2.13)$$

теңсіздігінен, мұндағы ε оң нақты сан, келесі теңсіздікті оңай аламыз

$$\int_0^t \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\eta \le t\cdot \sup_{0\le\eta\le t}\left|\frac{\partial u_m}{\partial \eta}\right|^2. \qquad (3.2.14)$$

Алынған (3.2.13)-(3.2.14) теңсіздіктерінен келесі теңсіздік орындалатынын тексеру оңай

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sup_{0\le\eta\le t}\frac{1}{k(\eta)}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^2 \quad &+\frac{1}{2}\lambda_m u_m^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{k\prime}{k^2}\left|\frac{du_m}{d\eta}\right|^2 d\eta\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \left|\frac{du_m(\eta)}{d\eta}\right|^2 d\eta+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right|^2 d\eta\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\cdot t\cdot \sup_{0\le\eta\le t}\left|\frac{\partial u_m}{\partial\eta}\right|^2+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right|^2 d\eta.\end{aligned}$$

Сондай-ақ,

$$\frac{1}{2}\sup_{0\le\eta\le t}\left|\frac{\partial u_m}{\partial\eta}\right|^2\frac{1-\varepsilon k(\eta)t}{k(\eta)}+\frac{\lambda_m}{2}u_m^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{k\prime(\eta)}{k^2(\eta)}\left|\frac{\partial u_m}{\partial\eta}\right|^2(\eta)d\eta \le \frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right|^2 d\eta.$$

$k(t)$ функциясы $[0,T]$ аралығында шенелгендіктен, кіші ε саны үшін $1-\varepsilon k(t)\cdot t>\delta$ теңсіздігі орынды. Сондай-ақ, жоғарыдағы теңсіздіктен

$$\frac{1}{2}\frac{1}{k(t)}\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2(t)+\frac{\lambda_m}{2\delta_1}u_m^2(t)+\frac{1}{2\delta_1}\int_0^t \frac{k\prime(\eta)}{k^2(\eta)}\left|\frac{\partial u_m}{\partial\eta}\right|^2(\eta)d\eta \le \frac{2}{\varepsilon\delta_1}\int_0^t \left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right|^2 d\eta,$$

теңсіздігін аламыз және бұл теңсіздік келесі теңсіздікке эквивалентті

$$\frac{1}{k(t)}\left|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|^2(t)+\lambda_m u_m^2(t)+\int_0^t \frac{k(\eta)}{k^2(\eta)}\left|\frac{\partial u_m}{\partial\eta}\right|^2(\eta)d\eta \le \frac{4}{\varepsilon\cdot\delta_1}\cdot\int_0^t \frac{f_m^2(\eta)}{k^2(\eta)}d\eta \qquad (3.2.15)$$

Лемма дәлелденді.

Айта кету керек, негізгі (3.2.15) теңсіздікті дәлелдеу үшін (3.2.14) теңсіздікті пайдаландық.

3.2.2 - Теорема $k\in C^{1+\alpha}[0,T]$, $1>\alpha>0$, $k(t)>0$, $t>0$, $t>0$, $k(0)=0$, $k'(t)\ge 0$, $\frac{f_m}{k}\in L_2(0,T)$ болсын. Онда (3.2.6)-(3.2.7) Коши есебінің барлық $u_m\in W_2^2(0,T)$ шешімдері төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\frac{1}{k(t)}\left(\sqrt{\lambda_m}\frac{du_m}{dt}\right)^2(t)+(\lambda_m u_m(t))^2+\int_0^t\left(\sqrt{\lambda_m}\frac{du_m}{dt}(t)\right)^2 d\eta$$
$$\leq d_2\left[\int_0^t\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}f_m(\eta)}{k(\eta)}\right)^2 d\eta+\frac{f_m^2(t)}{k^2(t)}\right]. \tag{3.2.16}$$

Дәлелдеуі. 3.2.1 - Леммадағы (3.2.8) теңсіздіктің екі жағын да λ_m көбейту арқылы келесі теңсіздікті аламыз

$$\frac{1}{k(t)}\left(\sqrt{\lambda_m}\left(\frac{d^2u_m}{dt^2}\right)\right)^2+\lambda_m^2u_m^2(t)+\int_0^t\frac{k\prime(\eta)}{k^2(\eta)}\left(\sqrt{\lambda_m}\left(\frac{du_m}{d\eta}\right)\right)^2(\eta)d\eta$$
$$\leq d_3\int_0^t\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}f_m(\eta)}{k(\eta)}\right)^2 d\eta. \tag{3.2.17}$$

Бұдан $\lambda_m^2u_m^2(t)\leq d_3\int_0^t\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}f_m(\eta)}{k(\eta)}\right)^2 d\eta$ теңсіздігі орынды екеніне көз жеткіземіз.

Жоғарыдағы және (3.2.7) теңсіздіктен

$$\frac{1}{k(t)}\frac{\partial^2u_m}{\partial t^2}(t)=-\lambda_m u_m(t)+\frac{f_m(t)}{k(t)},$$

теңдігі үшін

$$\left|\frac{1}{k(t)}\frac{\partial^2u_m}{\partial t^2}\right|^2\leq 2\left[\lambda_m^2u_m^2(t)+\frac{f_m^2(t)}{k^2(t)}\right]\leq 2\left[d_3\int_0^t\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}f_m(\eta)}{k(\eta)}\right)^2 d\eta+\frac{f_m^2(t)}{k^2(t)}\right] \tag{3.2.18}$$

теңсіздігін аламыз.

(3.2.17) және (3.2.18) теңсіздіктерінен 3.2.2 - теореманың дәлелін беретін келесі теңсіздікті оңай аламыз

$$\frac{1}{k(t)}\left(\sqrt{\lambda_m}\frac{d^2u_m}{dt^2}\right)^2+(\lambda_m u_m(t))^2+\int_0^t\left(\sqrt{\lambda_m}\frac{du_m}{dt}\right)^2 d\eta$$
$$\leq d_2\left[\int_0^t\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}f_m(\eta)}{k(\eta)}\right)^2 d\eta+\frac{f_m^2(t)}{k^2(t)}\right].$$

Теорема дәлелденді.

3.3 Аралас Коши есебінің жалпы жағдайы

Бұл бөлімде аралас Коши есебінің жалпы жағдайы үшін шешіміне априорлық бағалау алатын боламыз.

Тегіс $\partial\Omega\subset C^2$ шекарлы ақырлы $\Omega\subset R^n-$ обылысы болсын, $D=\Omega\times[0,T]$ $-$цилиндрлік облыс болсын. Осы D облысында келесі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k(t)\Delta_x u + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(t)u = f(x,t), \qquad (3.3.1)$$

аралас Коши есебінің бастапқы

$$u|_{t=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad (3.3.2)$$

шартын және

$$N[u] \equiv -\frac{u(x,t)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta_\xi}(x,\xi)u(\xi,t) - \varepsilon(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial \eta_\xi}(\xi,t)\right) d\xi = 0. \qquad (3.3.3)$$

бүйірлік шекаралық шартын қанағаттандыратын шешімін тап. 3.2 бөлімінде көрсетілгендей (3.3.1)-(3.3.3) есебінің шешімі келесі түрде жіктеледі

$$u(x,t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} u_m(t)e_m(x), \qquad (3.3.4)$$

$$f(x,t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} f_m(t)e_m(x), \qquad (3.3.5)$$

мұнда $\{e_m(x)\}$ жүйесі келесі спектрлік есептің іргелі шешімі

$$-\Delta_x e_m(x) = \lambda_m e_m(x),$$

$$N[e_m]|_{x\in\partial\Omega} \equiv 0,$$

мұнда

$$f_m(t) = \int_\Omega f(x,t)e_m(x)dx, \;\; u_m(t) = \int_\Omega u(x,t)e_m(x)dx.$$

(3.3.4)-(3.3.5) өрнекті (3.3.1) теңдеуге қою арқылы төмендегі Коши есебін аламыз

$$\frac{d^2u_m}{dt^2}(t) + k(t)\lambda_m u_m(t) + b(t)\frac{du_m}{dt}(t) + a(t)u_m(t) = f_m(t) \qquad (3.3.6)$$

$$u_m(0) = 0, \;\; u'_m(0) = 0. \qquad (3.3.7)$$

(3.3.7) бастапқы шартынан

$$\frac{du_m}{dt}(t) = \int_0^t \frac{\partial^2 u_m}{\partial \eta^2}(\eta)d\eta, \quad u_m(t) = \int_0^t \frac{\partial u_m}{\partial \eta}(\eta)d\eta.$$

қатынасын оңай алуға болады.

Осы қатынастарды пайдалана отырып, (3.2.11) теңдіктегідей келесі Лемманы дәлелдейміз.

Лемма 3.3.1 $k \in C^{1+\alpha}[0,T], 1 > \alpha > 0, k(t) > 0, t > 0, k(0) = 0, k'(t) \geq 0$, $\frac{a}{k} \in C^{1+\alpha}[0,T], \frac{b}{k} \in C^{1+\alpha}[0,T]$ және $\frac{f_m}{k} \in L_2[0,T]$ шарттары қанағаттандырылсын. Онда (3.3.6)-(3.3.7) есебінің $u_m \in W_2^2(0,T)$ шешімі үшін төмендегі теңсіздікті орынды

$$\left|\frac{du_m}{dt}\right|(t) \leq d_4 \cdot |k(t)| \left|\int_0^t \frac{f_m(\eta)}{k(\eta)} d\eta\right|.$$

3.3.2 - Теорема $b(t) \geq 0$, $a(t) \geq 0$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{a(t)}{k(t)} \leq 0$ шарттары және 3.3.1 - лемманың барлық шарттары орындалсын. Онда (3.3.6)-(3.3.7) Коши есебінің $u \in W_2^2(0,T)$ регуляр шешімі төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\frac{1}{k(t)}\left(\frac{du_m}{dt}\right)^2(t) + \lambda_m u_m^2(t) + \frac{a(t)}{k(t)} u_m^2(t) + \int_0^t \frac{b(\eta)}{k(\eta)}\left(\frac{du_m}{d\eta}\right)^2 d\eta$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left[\left(\frac{k\prime(\eta)}{k^2\eta}\frac{du_m}{d\eta}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{a(\eta)}{k(\eta)}\right] u_m^2(\eta) d\eta \leq d_5 \int_0^t \left|\frac{f(\eta)}{k(\eta)}\right|^2 d\eta. \quad (3.3.8)$$

(3.3.6) теңдеуінің екі жағын да λ_m-ге көбейтсек

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_m}{k(t)}\left(\frac{d^2u_m}{dt^2}\right)^2(t) \quad & +\lambda_m^2 u_m^2(t) + \lambda_m \frac{a(t)}{k(t)} u_m^2(t) \\ & +\lambda_m \int_0^t \left(\frac{k\prime(\eta)}{k^2(\eta)} + \frac{b(\eta)}{k(\eta)} - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{a(\eta)}{k(\eta)}\right)\right) u_m^2(\eta) d\eta \quad (3.3.9) \\ & \leq d_6 \left[\int_0^t \left(\frac{\sqrt{\lambda_m} f_m(\eta)}{k(\eta)}\right)^2 d\eta + \left(\frac{f_m(\eta)}{k_m(\eta)}\right)^2\right]\end{aligned}$$

теңсіздігін аламыз. Парсевал теңдігін ескере отырып x, t кеңістігі мағынасындағы (3.3.9) теңсіздігін алдық.

$g \in L_2(D)$ болсын, онда

$$g(x,t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} g_m(t) e_m(x),$$

$$\| g(x,t) \|_{l_2(\Omega)}^2 = \sum_{|m|=1}^{\infty} |g_m(t)|^2 < \infty, \ \ t \in [0,T],$$

мұнда $\{e_m(x)\}$ жүйесі Ньютон (көлем) потенциалының λ_m меншікті мәндеріне сәйкес толық ортонормаланған меншікті функциялыры $\alpha > 0$ болсын, ал $(-\Delta_x)^\alpha$ арқылы $g(x,t)$ функциясына келесідей әсер ететін операторды белгілейік

$$(-\Delta_x)^\alpha g = \sum_{|m|=1}^{\infty} g_m(t) \lambda_m^\alpha e_m(x), \quad (3.3.10)$$

$$\|(-\Delta_x)^\alpha g\|^2_{L_2(\Omega)}(t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} |g_m(t)\lambda_m^\alpha|^2 < \infty, \ \ t \in [0,T]. \qquad (3.3.11)$$

(3.3.10)-(3.3.11) теңдіктерді ескере отырып, (3.3.8) теңсіздігін келесі түрде жаза аламыз

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{k(t)}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t) + \left\|(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t) +$$
$$+\int_0^t \left\|\left(\frac{k\prime(\eta)}{k^2(\eta)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)}(\eta)d\eta \le d_7\left\|\frac{f}{k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t).$$

(3.3.4) және (3.3.5) қатынастарын ескере отырып, (3.3.9)-дан келесі теорема шығады

3.3.3 - Теорема $k \in C^{1+\alpha}[0,T]$, $1 > \alpha > 0$, $k(t) > 0$, $k(0) = 0$, $k'(t) \ge 0$ болсын. Егер $\left\|\frac{f}{k}\right\|_{L_2(\Omega)}(t) < \infty$ және $\left\|\frac{(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}f}{k}\right\|_{L_2(\Omega)}(t) < \infty$ болса, онда барлық $t \in [0,T]$ үшін (3.2.1)-(3.2.3) Коши есебінің $u \in W^2_{2,k}(D)$ шешімі төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\|u\|^2{}_{W^2_{2,k}(D)} = \left\|\frac{1}{\sqrt{k(t)}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t) + \|\Delta_x u\|^2{}_{L_2(\Omega)}(t)$$
$$+\int_0^t \left\|(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(\eta)d\eta + \|u\|^2{}_{L_2(\Omega)}(t)$$
$$\le d_8\left(\left\|\frac{f}{k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t) + \left\|\frac{(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}f}{k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t)\right), \ \ t \in [0,T]. \qquad (3.3.12)$$

Ал (3.3.12) теңсіздіктен $u \in W^2_{2,k}(D) \subset W^2_2(D)$ екені шығыды.

Енді (3.2.1)-(3.2.3) Коши есебінің шешімінің бар екендігін дәлелдейік. Ол үшін регулярланған аралас Коши есебін қарастырамыз:

$$L_\varepsilon u = \frac{1}{k(t)+\varepsilon}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta_x u_\varepsilon = \frac{f(x,t)}{k(t)+\varepsilon} \qquad (3.3.13)$$

$$u_\varepsilon|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \ \ N[u_\varepsilon] \equiv 0, \qquad (3.3.14)$$

мұнда $\varepsilon > 0$ кез келген оң сан.

(3.3.4) және (3.3.5) ескере отырып, $u_\varepsilon(x,t)$ және $f(x,t)$ функцияларының $e_m(x)$ арқылы спектралдық жіктелуін пайдаланып, (3.3.13)-(3.3.14) теңдіктерден

$$\frac{1}{k(t)+\varepsilon}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t^2}+\lambda_m u_{\varepsilon m}=\frac{f_m(t)}{k(t)+\varepsilon}$$

$$u_{\varepsilon m}|_{t=0}=0,\ \ \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

екенін аламыз.

Коши есебінің шешімінің қасиетінен, егер $f_m\in L_2(0,T)$ болса, онда оның шешімі $u_m\in W_2^2[0,T]$ кеңістігінде екенін байқаймыз. Сонымен қатар (3.2.15) және (3.2.16) теңсіздігіндей келесі теңсіздіктерді аламыз

$$\frac{1}{k(t)+\varepsilon}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t}\right)^2(t)+\lambda_m u_{\varepsilon m}^2(t)+\int_0^t\frac{k\prime}{k(t)+\varepsilon}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta\le d_9\int_0^t\left|\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)+\varepsilon}\right|^2 d\eta. \tag{3.3.15}$$

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{1}{k(t)+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t^2}(t)\right)^2+(\lambda_m u_{\varepsilon m}(t))^2+\int_0^t\frac{k\prime}{k(t)+\varepsilon}\lambda_m^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta\\&\le d_{10}\left[\int_0^t\left(\frac{f_m(\eta)}{k(\eta)}\right)^2 d\eta+\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}f_m(\eta)}{k(\eta)+\varepsilon}\right)^2 d\eta\right].\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

$u_\varepsilon(x,t)$ және $f(x,t)$ функцияларының $e_m(x)$ арқылы спектрлік жіктелуін пайдаланып, (3.3.15)-ден $\varepsilon\to 0$ шегін қолдана отырып, $u_\varepsilon\longrightarrow u\in W_2^1(D)$ және

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{W^1_{2,k}(D)}=\ &\left\|\frac{1}{\sqrt{k(t)}}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t)+\left\|(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t)\\&+\int_0^t\left\|\sqrt{\frac{k\prime}{k}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(\eta)d\eta+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t)\\&\le d_{11}\int_0^t\left\|\frac{f}{k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(\eta)d\eta\end{aligned}$$

екенін аламыз. Сондай-ақ, (3.3.16)-тен келесі теорема шығатынына көз жеткізе аламыз.

3.3.4 - Теорема $k\in C^{1+\alpha}[0,T]$, $1>\alpha>0$, $k(t)>0$, $t>0$, $k(0)=0$, $k'(t)\ge 0$ болсын. Онда $\left\|\frac{f}{k}\right\|_{L_2(\Omega)}(t)<\infty$ және $\left\|\frac{(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}f}{k}\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$, $t\in[0,T]$ болса, онда (3.2.1)-(3.2.3) Коши есебінің $u\in W^2_{2,k}(D)$ жалғыз шешімі бар және ол

$$\|u\|^2_{W^2_{2,k}(D)} = \left\|\frac{1}{\sqrt{k(t)}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t) + \|\Delta_x u\|^2_{L_2(\Omega)}(t)$$

$$+\int_0^t \left\|\sqrt{\frac{k\prime}{k}}(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(\eta)d\eta + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t)$$

$$\leq \int_0^t \left\|\frac{f}{k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(\eta)d\eta + \int_0^t \left\|\frac{(-\Delta_x)^{\frac{1}{2}}f}{k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}(\eta)d\eta$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Мұнда $W^2_{2,k}(D)$ Соболев кеңістігі $W^2_2(D)$ классикалық кеңістігінің ішкеңістігі екенін айта кету керек. Қатаң гиперболалық теңдеу жағдайындағыдай, $u \in W^1_2(D)$ және $u \in W^2_2(D)$ екенін сәйкесінше $\left\|\frac{f}{k}\right\|_{L_2(\Omega)}(t) < \infty$ және $\left\|\frac{grad_x f}{k}\right\|_{L_2(\Omega)}(t) < \infty$ шартымен барлық $t \in [0, T]$ үшін алғаш рет орнаттық. (3.3.8)-(3.3.9) теңсіздіктерін қолданып, (3.2.1)-(3.2.3) Коши есебінің жалпы $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k(t)\Delta_x u + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(t)u = f(x,t)$ теңдеуі үшін де жалқы шешімділігі де бірдей жолмен табылатынынын көрсеттік.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста, азғындалған гиперболалық теңдеулер үшін жалпы регулялы шеттік есептер тақырыбындағы зерттеу барысында, келесі негізгі нәтижелер алынды:

– азғындалған гиперболалық теңдеулердің аналогы болып табылатын бірінші дәрежелі әлсіз сингулярлы қарапайым дифференциалдық теңдеудің қарапайым түрлері үшін жалпы регулярлы шекалық шарт табу мәселелері және Коши есебінің қойылуы мәселелері зерттелді, регулярлы шекалық шарттың жалпы түрі табылды, Коши есебінің шешімінің бар және жалғыздығы дәлелденді;

– азғындалған гиперболалық теңдеулердің аналогы болып табылатын бір өлшемді екінші ретті әлсіз снгулярлы қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы регулярлы шекалық шарт табу және Коши есебінің қойылуы мәселелері зерттелді;

– Эйлер-Пуассон-Дарбу теңдеуі типті гиперболалық теңдеуі үшін Ньютон (көлемдік) потенциалының шеттік шартын пайдалана отырып, бастапқы шарттары салмақтық функциялармен берілген, «түрлендірілген» Коши есебі зерттелді;

– сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас Коши есебі дербес жағдайда зерттелді;

– сипаттауыш емес азғындалған гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін аралас Коши есебі жалпы жағдайда зерттелді. Қарастырылған аралас Коши есептерінің барлық шешімдері классикалық Соболев кеңістігінде алынды.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Кальменов Т.Ш., Отелбаев М. Критерий граничности интегральных операторов. Докл. Академии наук. – 2016. – Т. 466, №4. – С. 395-399.

2 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала. Докл. Академии наук. – 2009. – Т. 428, №4. – С. 16-19.

3 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения. Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, №4. – С. 595-599.

4 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области. Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. Т. 52, №6. – С. 1063-1068.

5 Kalmenov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and Spectral Problems for the Newton Potentials. Operator Theory: Advances and Applications. – 2011. – Vol. 216. – P. 187-210.

6 Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. – М., 1947. – 213 с.

7 Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte. – Uppsala, 1935. – 92 p.

8 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

9 Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические и эллиптические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

10 Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения. Докл. Академии наук СССР. – 1969. – Т. 187, №4. – С. 736-739.

11 Кальменов Т.Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения. Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, №1. – С. 178-181.

12 Врагов В.Н. О задачах Дарбу и Гурса для одного класса гиперболических уравнений. Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, №1. – С. 7-16.

13 Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. Математический сб. – 1959. – Т. 49, №1. – С. 29-84.

14 Врагов В.Н. Краевые задачи *для* неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: НГУ, 1983. – 84 с.

15 Kozhanov A.I. Linear inverse problems for a class of degenerate equations of Sobolev type. Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. – 2012. – Issue 11. – P. 33-42.

16 Kal’menov T.S. The characteristic Cauchy problem for a certain class of degenerate hyperbolic equations. Differentsial'nye Uravneniya. – 1973. – Vol. 9, №1. – P. 84-96.

17 Кальменов Т.Ш. О задаче Дарбу для одного вырождающегося уравнения. Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, №1. – С. 59-68.

18 Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Wave equation for operators with discrete spectrum and irregular propagation speed. Arch. Ration. Mech. Anal. – 2017. – Vol. 226, №3. – P. 1161-1207.

19 Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

20 Egorov, I.E., Pyatkov, S.G., Popov, S.V. The nonclassical differential-operator equations. – Novosibirsk: Nauka, 2000. – 336 p.

21 Radkevic E.V., Olejnik O.A. Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form. – London, 1973. – 259 p.

22 Ruzhansky M., Sadybekov M., Suragan D. Spectral Geometry of Partial Differential Operators. – London: Taylor & Francis, 2020. – 379 p.

23 Neumann J. Allgemine Eigenwert–theorie Hermitescher Functional operatoren. Math. Ann. – 1929. – Vol. 102 – P. 43-131.

24 Friedrichs K. The identity of week and strong extensions of differential operators. Frans. Amer. Math. Soc. – 1944. – Vol. 55 – P. 132-151.

25 Наймарк М.А. О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора. Известия Академии наук СССР. – 1940. – Т. 4, №1. – С. 53-104.

26 Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения 1// Матем. сб. – 1947. – Т. 20, №62. – С. 431-495; 1947. – Т. 21, №63. – С. 365-404.

27 Красносельский М.А. О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов. Укр.мат.журнал. – 1949. – № 1. – С.21–37.

28 Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов о частными производными. – М.: ИЛ, 1959. – 131 с.

29 Гехтман М.М. К вопросу о спектре самосопряженных расширений симметрического полуограниченного оператора. Док. академии наук СССР. – 1969. – Т. 186, №6. – С. 1250-1252.

30 Мамян А.К. Построение разрешимых расширений в па раллелепипеде для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6. – С. 358-370.

31 Горбачук В.И., Горбачук М.Б. О спектре самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного уравнением Штурма–Лиувилля с операторным потенциалом. Укр. матем. журнал. – 1972. – Т. 24, №6. – С. 726-734.

32 Романко В.К. К теории операторов вида $\frac{d^m}{dt^m} - A$. Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 5, №11. – С. 1950-1970.

33 Горбачук М.Л., Михайлец В.А. Полуограниченные самосопряженные расширения симметрических операторов. Докл. Академии наук СССР. – 1976. – Т. 226, №4. – С. 765-767.

34 Михайлец В.А. Спектры операторов и граничные задачи. Спектральный анализ дифференциальных операторов: сб. науч. тр. – Киев, 1980. – С. 106-131.

35 Вишик М.И. Линейные расширения операторов и краевые условия. Доклады АН СССР. – 1949. – Т.65, № 4. – С.433–436.

36 Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений. Тр. Моск. матем. общ . – 1952. – Т. 1. – С. 187-246.

37 Дезин А.А. К общей теории граничных задач. Матем. сб. – 1976. – Т. 100(142), №2(6). – С. 171-180.

38 Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 207 с.

39 Дезин А.А. Спектральные характеристики общих граничных задач для оператора D^2. Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, вып. 2. – С. 249-256.

40 Дезин А.А. О задачах для линейных дифференциальных операций. Матем. сб. – 1986. – Т. 129(171), №3. – С. 397-406.

41 Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, №5. – С. 873-885.

42 Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения. Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 16, №6. – С. 1105-1121.

43 Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для многомерного волнового уравнения. Докл. Академии наук КазССР. – 1982. – №3. – С. 28-32.

44 Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе – Самарского. Докл. академии наук СССР . – 1982. – Т. 265, №4. – С. 815-819.

45 Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории расширения и сужения операторов. Известия Академии наук КазССР. – 1982. – №5, ч. 1. – С. 24-26; 1983. – №1, ч. 2. – С. 91-96.

46 Кокобаев Б.К., Отелбаев М. Об одном классе корректных краевых задач. Успехи матем. наук . – 1982. – Т. 37, №4. – С. 227-229.

47 Kakharman N., Tulenov K., Zhumanova L. On hyponormal and dissipative correct extensions and restrictions. Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – Vol. 45, №16. – P. 9049-9060.

48 Kakharman N., Otelbaev M. Solution estimates for one class of elliptic and parabolic nonlinear equations. Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022. – №69. – P. 1-10.

49 Kakharman N., Kal'menov T. Mixed Cauchy problem with lateral boundary condition for noncharacteristic degenerate hyperbolic equations. Boundary Value Problems. – 2022. – №1. – P. 1-11.

50 Kal'menov T.Sh., Kakharman N., On a problem of the bitsadze-samarskii for the sturm-liouville equation. Mathematical journal. – 2018. – Vol. 18, №1. – P. 88-98.

51 Kal'menov T.Sh., Kakharman N., Sadybekov M.A. About root functions of periodic Sturm-Liouville problem. Kazakh Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 19, №1. – P. 31-38.

52 Kal'menov T.Sh., Kakharman N. On the completeness of root vectors of regular boundary value problems for one-dimensional differential operators. Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, №2. – P. 73-84.

53 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

54 Rainville E.D. Special functions. – NY.: Chelsea Publishing Company, 1971. – 365 p.

55 Abramowitz M., Stegun I.A., Romer R.H. Handbook of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. – Sydney: Government Printing Office, 1972. – 1060 p.